Kleyer, ...

Encyklopädie der gesamten natur wissenschaften

Lehrbuch

über den

binomischen und polynomischen Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen

mit

259 Fragen und Antworten, 202 Erklärungen, 502 meist gelösten Aufgaben und einem Formelnverzeichnis

zum

Selbststudium und dem Gebrauch an Schulen

bearbeitet

nach dem System Kleyer

von

A. Haas.

Bremerhaven und **Leipzig.**
Verlag v. L. v. Vangerow.
1906.

293/2 1905, June 16 — 1907, Aug. 16.

Harvard fund.

Vorwort.

In Kleyers Encyklopädie der mathematischen-technischen und exakten Naturwissenschaften wurde es bisher als Mangel empfunden, daß das Verbindungsglied zwischen der gewöhnlichen Algebra und der höheren Analysis fehlte, also die Bearbeitung jenes Zweiges der Elementarmathematik, welche gewöhnlich als niedere Analysis bezeichnet wird. Diese Lücke auszufüllen ist der Zweck des vorliegenden Bandes. Anknüpfend an die Buchstabenrechnung bietet derselbe die Ableitung des binomischen und polynomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten; dann folgt die Theorie der arithmetischen Reihen höherer Ordnungen nebst deren Anwendung auf figurierte Zahlen und die wichtige Interpolation; hierauf eine einfache Darstellung der Gesetze über die Konvergenz und Divergenz der unendlichen Reihen, die Entwicklung der Funktionen in solche Reihen samt ihrer Anwendung auf die wichtigen Reihen der Algebra und Trigonometrie. Den Schluß bildet ein ausführliches Formelnverzeichnis. Daß nur reelle Größen in den Kreis der Untersuchung gezogen worden sind, begründet sich aus den in der Encyklopädie schon vorhandenen Bearbeitungen der Lehre von den imaginären und kompleten Zahlen von K. Krüger und der Funktionentheorie von Dr. Laska.

Dem Zweck des ganzen Werkes entsprechend, habe ich den oben genannten Stoff in möglichst einfacher Art und leichtverständlich ohne zu große Konzessionen an wissenschaftliche Strenge vorzutragen versucht; als Form mußte die katechetische beibehalten werden. Die große Zahl von gelösten und ungelösten Aufgaben, welche überall eingestreut sind, dürften das Studium des Buches wesentlich erleichtern und letzteres als eine reiche Sammlung von Beispielen auch solchen Kollegen empfehlen, welche den theoretischen Teil nicht benutzen wollen.

Möge dasselbe eine freundliche Aufnahme finden und dazu beitragen, das Interesse für die Mathematik zu wecken und zu fördern.

Der Verlagshandlung, welche allen meinen Wünschen freundlichst entgegengekommen ist, spreche ich für die sorgfältige Herstellung und gute Ausstattung des Druckes meinen besten Dank aus.

Stuttgart, im Juli 1906.

Professor Dr. **Haas.**

Inhalts-Verzeichnis.

1480. Heft.

Preis des Heftes 25 Pfg.

Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Seite 1—16. Mit 1 Figur.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.**

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

I. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Seite 1—16. Mit 1 Figur.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über ein Binom und den binomischen Lehrsatz im allgemeinen. — Beweise des binomischen Lehrsatzes. — Hilfsformeln. — Aufgaben.

Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

I. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

1. Erläuternde Fragen mit Antworten über ein Binom und den binomischen Lehrsatz im allgemeinen.

Frage 1. Was ist in der Mathematik unter einem Binom zu verstehen?

Erkl. 1. Das Wort Binom stammt vom lateinischen bis = zweimal und dem griechischen νέμο = zuteilen, verteilen, ὁ νόμος = das Verteilte, Gesetzte.

Erkl. 2. Der griechische Mathematiker Euklid (um 300 v. Chr.) gab dem Begriff des Binoms eine viel engere Fassung; er verstand darunter eine zweiteilige Größe von der Form $a+\sqrt{b}$ oder $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, wo a u. b rationale Zahlen bedeuten. Siehe seine Elemente X. 37.

Antwort. In der Mathematik versteht man unter einem Binom oder Binomium eine Größe, welche aus zwei Teilen besteht, welche durch plus oder minus mit einander verbunden sind, also Größen wie:

$$190\tfrac{3}{4}-5{,}66\ldots;\ a+b;\ a-b;\ 5a+3b;$$
$$7x-8y;\ 36x^2+25y^2;\ 9a^2b^2-7y^2;$$
$$a+\sqrt{2};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{10}\sqrt{5};\ 2+3i;$$
$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{2}\sqrt{3};\ m^{3/4}+\sqrt[7]{n^8};\ x^{\frac{m}{n}}-y^{\frac{p}{q}}.$$

Frage 2. Warum ist die Betrachtung eines Binoms von besonderer Wichtigkeit?

Erkl. 3. Über das Rechnen mit Binomischen Größen findet der Leser Aufschluß in Kleyer, Buchstabenrechnung,
" Lehre von den Potenzen,
" Quadratische Gleichungen,
" Lehre von den imaginären Zahlen.

Antwort. Die mathematische Rechnung führt sehr häufig auf binomische Ausdrücke, welche aus 2 reellen Größen oder aus einer reellen und einer imaginären zusammengesetzt sind; es werde nur erinnert an den algebraischen Ausdruck des pythagoräischen Lehrsatzes a^2+b^2; an die Formel zur Auflösung einer quadratischen Gleichung $-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, an die Behandlung der komplexen Größe $a+b\sqrt{-1}$ u. s. w.

Frage 3. Was ist unter einer Potenz eines Binoms zu verstehen?

Antwort. Wie unter der zweiten Potenz von p oder unter p^2 das Produkt $p.p$, unter der dritten Potenz von p oder unter p^3 das Produkt $p.p.p.$ u. s. verstanden wird, ist die zweite Potenz des Binoms $a+b$ oder $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$; die dritte Potenz oder $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$ u. s. w. Allgemein hat man hienach die $n^{\underline{te}}$ Potenz von $(a+b)$ oder $(a+b)^n$, wenn n eine **ganze positive Zahl vorstellt,** gleich dem Produkt aus n gleichen Faktor $a+b$.

Geradeso ist $(a-b)^2=(a-b)(a-b)$

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)$$

$$(3a-2b)^4=(3a-2b)(3a-2b)(3a-2b)(3a-2b)$$

$$(5c-2d)^5=(5c-2d)(5c-2d)(5c-2d)(5c-2d)(5c-2d).$$

Wir beschränken uns hier einmal vorläufig auf die Betrachtung der Potenzen des Binoms $a+b$.

Frage 4. Welche Ausdrücke liefert die Buchstabenrechnung für die zweite, dritte und vierte Potenz des Binoms $a+b$?

Antwort. Durch die in gewöhnlicher Weise durchgeführte Ausrechnung der obigen Produkte folgt:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2).(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

$$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3).(a+b)$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \ldots\ldots\ldots \text{№ } 1.$$

Frage 5. Wie erhält man hienach aus einer Potenz des Binoms $a+b$ die um 1 höhere Potenz des gleichen Binoms?

Antwort. Aus $(a+b)^3$ erhält man $(a+b)^4$, indem man den für $(a+b)^3$ gewonnenen Ausdruck $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ mit $a+b$ multipliziert; dies liefert den vorhin für $(a+b)^4$ angegebenen Ausdruck; aus ihm erhält man durch abermalige Multiplikation mit $a+b$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5;$$

durch Fortsetzung dieses Verfahrens läßt sich jede Potenz von $a+b$ ausrechnen, falls deren Exponent eine ganze positive Zahl ist.

Frage 6. Ist es nicht möglich, eine beliebige Potenz des Binoms $a+b$, wenn sein Exponent eine positive ganze Zahl ist, ausgerechnet anzuschreiben, ohne die niedrigeren Potenzen vorher bestimmen zu müssen?

Erkl. 4. Nach der Lehre von den Potenzen hat jede Potenz mit dem Exponenten 0 den Wert 1; also ist $a^0=1$; $b^0=1$; demnach kann man auch umgekehrt setzen statt des Faktors 1 die Potenz a^0 oder b^0.

Weiter sei daran erinnert, daß $a=a^1$ und $b=b^1$ ist.

Antwort. Aus den für die vorigen Potenzen des Binoms $a+b$ gewonnenen Ausdrücken läßt sich leicht eine gewisse Gesetzmäßigkeit des Baues erkennen. Betrachten wir z. B. den Ausdruck für $(a+b)^5$, so ist das erste Glied a^5 oder $a^5 b^0$, das zweite $5a^4b^1$, das dritte $10a^3b^2$, das vierte $10a^2b^3$, das fünfte $5a^1b^4$ und das letzte sechste b^5 oder a^0b^5; denn sowohl a^0 als b^0 hat den Wert 1; es besteht also der Ausdruck aus 6 Gliedern von der Form $z\,a^x b^y$, wo z einen der Zahlenfaktoren 1, 5, 10 vorstellt und sowohl der Exponent x von a als auch der Exponent y von b eine der Zahlen 0, 1, 2. u. s. w. bis 5 einschließlich ist derart, daß stets $x+y$ die Summe 5 gibt; ferner beginnt im ersten Glied der Exponent x von a mit 5 und der Exponent y von b mit 0; im folgenden zweiten Glied fällt x auf 4, während y auf 1 steigt; im dritten Glied fällt x von 4 auf 3 und y wächst von 1 auf 2 u. s. w.; bis schließlich im letzten Glied der Exponent x von a auf den Wert 0 herabsinkt, während der Exponent y von b den größten Wert 5 erreicht. Endlich sehen wir noch, daß der Zahlenkoeffizient z im ersten und letzten Glied $=1$, im zweiten und im vorletzten Glied $=5$ und in den beiden mittleren Gliedern je $=10$ ist. Der sechsgliedrige Ausdruck hat also in bezug auf die Zahlenkoeffizienten einen symmetrischen Bau und in bezug auf die Produkte $a^x b^y$ ist er nach fallenden Potenzen a und steigenden Potenzen von b geordnet.

Frage 7. Was läßt sich hienach von $a+b$ vermuten?

Erkl. 5. Die Bezeichnungen z_3, z_4 und z_5 wurden eingeführt, um anzudeuten, daß z_3 der Zahlenkoeffizient des d r i t t e n Gliedes sein soll, z_4 jener des v i e r t e n und z_5 jener des f ü n f t e n Gliedes.

Antwort. Der Ausdruck für $(a+b)^6$ wird 7 Glieder besitzen, von denen das erste a^6, das letzte b^6, das zweite $6a^5b$ und das vorletzte $6ab^5$ heißen werden; das dritte wird $z_3\,a^4b^2$, das vierte $z_4\,a^3b^3$, das fünfte $z_5\,a^2b^4$ lauten; welche Werte

aber die Zahlenkoeffizienten z_3, z_4 und z_5 haben werden, läßt sich noch nicht angeben; zu ihrer Ermittlung bleibt vorläufig nur der Weg den Ausdruck für $(a+b)^5$ mit $(a+b)$ zu multiplizieren, wobei folgt: $(a+b)^6 = a^6 + 6\,a^5 b + 15\,a^4 b^2 + 20\,a^3 b^3 + 15\,a^2 b^4 + 6\,a b^5 + b^6$; somit ist $z_3 = 15$; $z_4 = 20$ u. $z_5 = z_3 = 15$.

Frage 8. Was für einen Satz versteht man unter dem binomischen Lehrsatz?

Antwort. Der binomische Lehrsatz ist die Formel, welche eine beliebige Potenz eines Binoms in der Form einer Reihe darstellt. Beschränken wir uns wieder auf das Binom $a+b$, so gibt der binomische Lehrsatz die Formel an, welche uns für $(a+b)^6$ alle Glieder mit ihren Zahlenkoeffizienten liefert; ebenso für $(a+b)^7$ und allgemein für $(a+b)^n$, wenn n eine **ganze positive Zahl** ist.

Frage 9. Wie heißt der binomische Lehrsatz für $(a+b)^n$, wenn n eine ganze positive Zahl ist?

Antwort. Es ist

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1) \cdot n} a^{n-n} b^n.$$

z. B.: $$(a+b)^6 = a^6 + \frac{6}{1} a^5 b^1 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} a^4 b^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^2 b^4$$

$$+ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^1 b^5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^0 b^6,$$

was nach der Vereinfachung der einzelnen Glieder wieder den oben gefundenen Ausdruck ergibt.

---

2. I. Beweis des binomischen Lehrsatzes.

Frage 10. Wie läßt sich der binomische Lehrsatz **beweisen?**

Erkl. 6. Es ist

$$\frac{3(3-1)}{1.2} = \frac{3.2}{1.2} = 3.$$

$$\frac{3(3-1)(3-2)}{1.2.3} = \frac{3.2.1}{1.2.3} = 1$$

$$\frac{4(4-1)}{1.2} = \frac{4.3}{2} = 6:$$

$$\frac{4(4-1)(4-2)}{1.2.3} = \frac{4.3.2}{2.3} = 4$$

$$\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3.4} = \frac{4.3.2}{2.3.4} = 1$$

Erkl. 7. Der Leser wird gebeten, die Ausdrücke für $(a+b)^5$, $(a+b)^6$ u. s. w. ebenfalls nach der allgemeinen Formel für $(a+b)^n$ anzuschreiben.

Antwort. Zunächst können wir schreiben:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$
$$= a^2 + \frac{2}{1}\,ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + \frac{3}{1}\,a^2 b + \frac{3(3-1)}{1.2}\,a\,b^2$$
$$+ \frac{3(3-1)(3-2)}{1.2.3}\,b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3$$
$$+ b^4 = a^4 + \frac{4}{1}\,a^3\,b + \frac{4(4-1)}{1.2}\,a^2\,b^2$$
$$+ \frac{4(4-1)(4-2)}{1.2.3}\,a\,b^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3.4}\,b^4$$

und ebenso $(a+b)^5$ und $(a+b)^6$.

Daraus erkennt man die gemeinschaftliche Form

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}\,a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}\,a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,a^{n-3}b^3 + \ldots..,$$

welche für $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$ und $n=6$ als richtig erprobt ist. Es fragt sich nun, ob diese Übereinstimmung sich nur auf die Zahlen 2 bis 6 erstreckt oder ob sie noch weiter geht und für jeden beliebigen ganzen Exponenten Gültigkeit hat. Wir wollen annehmen, n sei eine beliebige positive Zahl und es sei

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.\,a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}\,a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,a^{n-3}b^3 + \ldots..$$

Um daraus auf die gewöhnliche Art, d. h. durch Multiplikation, $(a+b)^{n+1}$ zu erhalten, müssen wir

links und rechts mit $a+b$ multiplizieren; dabei erhalten wir:

$$(a+b)^{n+1}=\left\{a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots\ldots\right\}.\left\{a+b\right\}$$
$$=a^{n+1}+\frac{n}{1}a^nb+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-1}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-2}b^3+\ldots\ldots$$
$$+a^nb+\frac{n}{1}a^{n-1}b^2+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^3+\ldots\ldots$$
$$=a^{n+1}+\left\{\frac{n}{1}+1\right\}a^nb+\left\{\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n}{1}\right\}a^{n-1}b^2$$
$$+\left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)}{1.2}\right\}a^{n-2}b^3+\ldots\ldots$$

Da nun $\frac{n}{1}+1=\frac{n+1}{1}$,

$$\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n}{1}=\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{2n}{1.2}=\frac{n(n-1+2)}{1.2}=\frac{(n+1)n}{1.2},$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{n(n-1)}{1.2.3}\left\{n-2+3\right\}$$
$$=\frac{(n+1)n.(n-1)}{1.2.3}\text{ usw.,}$$

so folgt:

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\frac{n+1}{1}a^nb+\frac{(n+1)n}{1.2}a^{n-1}b^2$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}a^{n-2}b^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\text{ also}$$

wenn man $n+1=\nu$ setzt:

$$(a+b)^\nu=a^\nu+\frac{\nu}{1}a^{\nu-1}b+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}a^{\nu-2}b^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}a^{\nu-3}b^3+\ldots.$$

Erkl. 8. Dieses Beweisverfahren nennt man **höhere Induktion** oder den **Schluss von n auf $n+1$**. Derselbe wurde besonders von dem Mathematiker **Kästner**, geboren 1719, gestorben 1800 in Göttingen, angewandt.

Diese Form stimmt nun mit der obigen vollkommen überein. **Gilt also die binomische Form für irgend ein ganzzahliges n, so gilt sie auch für die nächste Zahl $n+1$.** Da sie nun erwiesenermaßen für $n=4$ gilt, so gilt sie auch für den Exponenten

$n = 5$; weil sie also für $n = 5$ Giltigkeit hat, gilt sie auch für $n = 6$; aus der Giltigkeit für 6 folgt jetzt auch jene für 7 usw. Hiermit ist gezeigt, dass der binomische Lehrsatz für jeden ganzen positiven Exponenten Giltigkeit hat.

Frage 11. An welchem Mangel leidet die vorige Beweisführung und wie läßt sie sich strenger durchführen?

Antwort. Aus der vorgetragenen Methode erhält man keinen Aufschluß darüber, daß die binomische Formel die oben gegebene Form haben muß; insbesondere vermißt man die tiefere Einsicht in die Bildungsweise und die Aufeinanderfolge der Zahlenkoeffizienten zu unten. Um dem Leser auch hier Klarheit zu verschaffen, lassen wir jetzt einen zweiten strengen Beweis folgen.

---

3. II. Beweis des binomischen Lehrsatzes.

Aufgabe 1. Beweise, daß für jede ganze Zahl z die Gleichung besteht:

$$\frac{z(z+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(z-1)z}{1 \cdot 2} = z.$$

Auflösung. Es ist

$$\frac{z(z+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(z-1)z}{1 \cdot 2}$$

$$= \frac{z}{1 \cdot 2}\left\{(z+1) - (z-1)\right\} = \frac{z \cdot 2}{1 \cdot 2} = z.$$

Demnach ist auch umgekehrt

$$z = \frac{z(z+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(z-1)z}{1 \cdot 2}$$

Nehmen wir z. B. $z = 4$ an, so erhalten wir die Identität:

$$4 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}$$

Ebenso gibt $z = 10$:

$$10 = \frac{10 \cdot 11}{1 \cdot 2} - \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2}$$

Aufgabe 2. Beweise, daß die Summe der ersten ganzen Zahlen

$$1+2+3+4+\ldots.+n=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$$

ist.

Erkl 9. Wenn gefragt ist, wie gross $1+2+3+4+\ldots+10$ sei, so nehmen wir $n=10$, also $n+1=11$ und erhalten

$$1+2+3+\ldots+10=\frac{10\,.\,11}{1\,.\,2}=55.$$

Soll die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 99 einschliesslich bestimmt werden, so setzen wir $n=99$, $n+1=99+1=100$ und bekommen:

$$1+2+3+\ldots+99=\frac{99\,.\,100}{1\,.\,2}=4950.$$

Auflösung. Wenn wir in der Gleichung der vorigen Aufgabe für z der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, 4, ... n wählen, so erhalten wir:

$$1=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}-\frac{0\cdot 1}{1\cdot 2}$$

$$2=\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}-\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}$$

$$3=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}-\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}$$

. . . .

$$n-1=\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}-\frac{(n-2)(n-1)}{1\cdot 2}$$

$$n=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}-\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}$$

Die Addition dieser Gleichungen ergibt links $1+2+3\ldots+n$, während auf der rechten Seite alle Glieder bis auf $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ wegfallen, womit bewiesen ist, daß die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis n, letztere eingeschlossen, die Summe $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ ergibt.

Aufgabe 3. Beweise, daß für jede ganze Zahl z die Gleichung richtig ist:

$$\frac{z(z+1)(z+2)}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{(z-1)\,.\,z(z+1)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{z(z+1)}{1\cdot 2}$$

Auflösung. Es ist

$$\frac{z(z+1)(z+2)}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{(z-1)z(z+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$=\frac{z(z+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\Big\{(z+2)-(z-1)\Big\}$$

$$=\frac{z(z+1)\,.\,3}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{z(z+1)}{1\cdot 2}$$

Hiernach ist auch umgekehrt:

$$\frac{z(z+1)}{1\cdot 2}=\frac{z(z+1)(z+2)}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{(z-1)z(z+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Nehmen wir z. B. $z = 3$ an, so wird $z - 1 = 2$, $z + 1 = 4$ und $z + 2 = 5$; jetzt folgt die Identität

$$\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

oder ausgerechnet:

$$6 = 10 - 4.$$

Ebenso gibt $z = 12$, $z - 1 = 11$, $z + 1 = 13$ und $z + 2 = 14$:

$$\frac{12 \cdot 13}{1 \cdot 2} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

oder:

$$78 = 364 - 286.$$

Aufgabe 4. Beweise, daß die Summe der n ganzen Zahlen

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

ist.

Erkl. 10. Die Zahlen, welche auf der linken Seite der vorigen Gleichung stehen, sind alle nach dem gleichen Gesetz gebildet und besitzen auch eine bestimmte Reihenfolge; gehen wir von der ersten Zahl 1 aus, so erhalten wir das zweite Glied der Reihe durch den Bruch $\frac{2(2+1)}{1 \cdot 2} = 3$; das dritte Glied ist dann $= \frac{3(3+1)}{1 \cdot 2} = 6$; das vierte $= \frac{4(4+1)}{1 \cdot 2} = 10$; das fünfte $= \frac{5(5+1)}{1 \cdot 2} = 15$ usw. bis zum n^{ten} Glied, das $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ heißen muß.

Auflösung. Wir benutzen die obige Formel der vorigen Aufgabe und setzen in ihr der Reihe nach für z die Werte 1, 2, 3 ... bis n ein; dabei erhalten wir:

$$\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Durch Addieren folgt:

$$\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

oder ausgerechnet:

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Aufgabe 5. Beweise, daß für jede ganze Zahl z die Gleichung richtig ist:

$$\frac{z(z+1)(z+2)(z+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{(z-1)z(z+1)(z+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{z(z+1)(z+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Auflösung. Wenn wir in den beiden Gliedern links den Faktor

$$\frac{z(z+1)(z+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

heraussetzen, kommt in die Klammer $(z+3)-(z-1)=4$; diese Zahl 4 fällt dann gegen den Faktor 4 unten weg und es bleibt der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens übrig.

Aufgabe 6. Beweise, daß die Summe der n ganzen Zahlen

$$1+4+10+20\ldots\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \text{ ist.}$$

Auflösung. Aus der umgedrehten Formel der vorausgehenden Aufgabe 5 leiten wir, indem wir nach einander der Zahl z die Werte 1, 2, 3 ... n beilegen, die Gleichungen ab:

$$\frac{1(1+1)(1+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{0\cdot 1(1+1)(1+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$\frac{2(2+1)(2+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1\cdot 2(2+1)(2+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$\frac{3(3+1)(3+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{3(3+1)(3+2)(3+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{2\cdot 3\cdot(3+1)(3+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

Addieren wir nun links und rechts, so folgt:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

weil auf der rechten Seite das zweite Glied jeder Reihe gegen

Erkl. 11. Hier ist das I. Glied der Reihe hervorgegangen gedacht aus dem

Bruch $\frac{1\,(1+1)\,(1+2)}{1\,.\,2\,.\,3} = 1$, das II. Glied aus $\frac{2\,(2+1)\,(2+2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{2\,.\,3\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} = 4$, das III. Glied aus $\frac{3\,(3+1)\,(3+2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3} = 10$ usw. bis zum $n^{\underline{\underline{ten}}}$ Glied $\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$

das erste Glied der vorhergehenden Reihe wegfällt, wie in den vorhergehenden Aufgaben.

Aufgabe 7. Beweise ebenso die Richtigkeit der Gleichung:

$$\frac{z\,(z+1)\,(z+2)\,(z+3)\,(z+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{(z-1)\,z\,(z+1)\,(z+2)\,(z+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$
$$= \frac{z\,(z+1)\,(z+2)\,(z+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

Auflösung. Bleibt dem Leser zur Übung überlassen.

Aufgabe 8. Beweise, daß die Summe der n ganzen Zahlen:

$$1 + 5 + 15 + 35 + \ldots\ldots + \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}$$
$$= \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

Auflösung. Bleibt dem Leser zur Übung überlassen.

Aufgabe 9. Wenn man mit der Bildung der Gleichungen fortsetzt, wie lautet dann die nun kommende $5^{\underline{\underline{te}}}$, $6^{\underline{\underline{te}}}$ und $m^{\underline{\underline{te}}}$ Gleichheit?

Auflösung. Ebenso.

Aufgabe 10. Welche Summenreihe läßt sich aus der V., VI. usw. Gleichung gewinnen?

Auflösung. Ebenso.

Frage 12. Wie lauten hiernach die Zahlenreihen, auf welche die vorigen Entwicklungen geführt haben?

Antwort. Die Zusammenfassung der vorhin gefundenen Reihen gibt:

$$\text{I)}\quad 1+1+1+1+\ldots\ldots+1=\frac{n}{1}$$

$$\text{II)}\quad 1+2+3+4+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{1\cdot 1}$$

$$\text{III)}\quad 1+3+6+10+\ldots\ldots+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\text{IV)}\quad 1+4+10+20+\ldots\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$\text{V)}\quad 1+5+15+35+\ldots\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\ \text{usw.}\ \ldots\ldots \quad \text{№ } 2$$

Frage 13. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Gliedern dieser Reihen?

Erkl. 12. Beschränken wir uns auf die 4 ersten Glieder jeder Reihe, so gibt die

$$\begin{array}{ll} \text{erste} & 1+1+1+1=4 \\ \text{zweite} & 1+2+3+4=10 \\ \text{dritte} & 1+3+6+10=20 \\ \text{vierte} & 1+4+15+20=35; \end{array}$$

dabei ist 4 das IV. Glied der II. Reihe, 10 das IV. Glied der III. Reihe, 20 jenes der IV. und 35 jenes der V. Reihe usw.

Erkl. 13. Der Leser wolle beachten, daß die Differenzenbildung in der V. Reihe auf die IV. Reihe führt; die Wiederholung der Differenzenbildung in der IV. Reihe liefert die III. Reihe; ebenso kommt man von der III. zur II. und von der II. zur I. Reihe.

Antwort. Wenn wir in allen diesen Reihen linkerhand immer die gleiche Anzahl Glieder nehmen, also der Zahl n überall den gleichen Wert beilegen, so folgt ohne weiteres der **Satz**, daß die Summe jeder Reihe gleich dem Schlußglied der folgenden Reihe ist. Ferner sehen wir, daß als direkte Folgerung aus unseren obigen Gleichungen sich der **II. Satz** ergibt, daß die Differenzen zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern einer Reihe die Glieder der vorangehenden Reihe sind.

Nehmen wir z. B. die V. Reihe, so gilt für sie die Gleichung der Aufgabe 5; z. B.:

$$\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\ \text{oder}$$

$$5-1=4;\quad \text{ferner}$$

$$\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\ \text{oder}$$

$$15-5=10;\quad \text{ebenso}$$

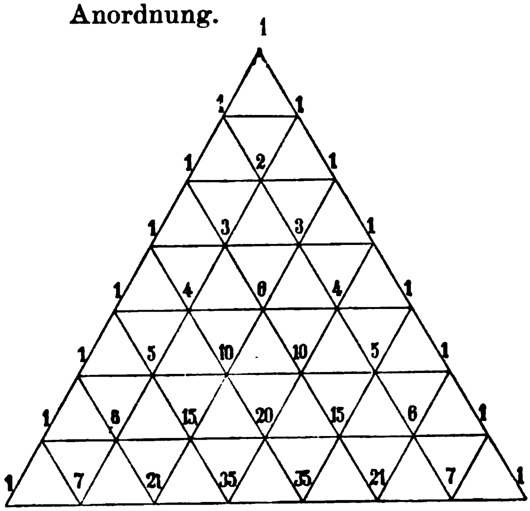
$$35-15=20\ \text{usw.};$$

dabei sind 1, 5, 15, 35 Glieder der V. Reihe, die auftretenden Differenzen 4, 10, 20 Glieder der IV. Reihe.

Frage 14. Warum bezeichnet man die vorhin entwickelten Reihen als die Reihen der figurierten Zahlen?

Erkl. 14. Das „arithmetische Dreieck" kommt schon vor bei Stifel, Arithmethica integra, Nürnberg 1544; und dann bei Pascal, Traité du triangle arithmetique, Paris 1665.

Antwort. Die genannten Reihen können in der Art in der Form eines gleichseitigen Dreiecks geschrieben werden, daß jede Reihe zweimal vorkommt, einmal in der einen Schrägrichtung und ein zweites Mal in der andern Schrägrichtung. Dabei erhalten wir nachstehende Anordnung.



Frage 15. Wie lauten in diesem Zahlendreieck die Horizontalreihen, welche Eigenschaften und welche Bedeutung haben sie?

Erkl. 15. Aus dem nebenstehenden Satz ergibt sich ein einfaches Verfahren, das Zahlendreieck rasch anzuschreiben. Man beginne mit der Reihe 1, 1; die folgende wird dann 1, 1 + 1, 1 oder 1, 2, 1; die dritte wird 1, 1 + 2, 2 + 1, 1 oder 1, 3, 3, 1; die vierte 1, 1+3, 3+3, 3+1, 1 oder 1, 4, 6, 4, 1; die fünfte 1, 1 + 4, 4 + 6, 6 + 4, 4 + 1, 1 oder 1, 5, 10, 5, 1 usw.

Antwort. Die I. Horizontalreihe heißt 1, 1; die II. lautet 1, 2, 1; die III. 1, 3, 3, 1; die IV. 1, 4, 6, 4, 1 usw. Wir sehen, daß jede dieser Reihen mit 1 anfängt und mit 1 endigt; ferner daß jede von vorne gelesen ebenso lautet wie von rückwärts; ihr Bau ist also ein symmetrischer. Ferner beachte man, daß aus dem II. Satz der vorletzten Frage für die Horizontalreihen der wichtige Satz folgt, daß die Summe von zwei benachbarten Gliedern einer Horizontalreihe ein Glied der folgenden Horizontalreihe gibt. Nehmen wir z. B. die V. Horizontalreihe, so folgt:

$$1+5+10+10+5+1;$$
$$6 \quad 15, \quad 20 \quad 15 \quad 6$$

fügen wir am Anfang und am Schluß noch die Zahl 1 hinzu, so haben wir 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 d. h. die nächste Reihe. Aus dieser bilden wir:

$$\underbrace{1+6}\underbrace{+15}\underbrace{+20}\underbrace{+15}\underbrace{+6}\underbrace{+1}$$

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \text{ usw.}$$

Endlich beachte man noch, daß die Glieder jeder Horizontalreihe mit den Zahlenfaktoren übereinstimmen, welche wir in der Formel des binomischen Lehrsatzes beim Ausmultiplizieren der Potenzen von $a + b$ erhalten haben; sie heißen deshalb auch die **Binomialkoeffizienten.**

Frage 16. Wie heißt die n^{te} Horizontalreihe im Zahlendreieck?

Antwort. Die erste Zahl der n^{ten} Horizontalreihe heißt sicher 1; die zweite Zahl der n^{te} Horizontalreihe muß n heißen; sie ist das n^{te} Glied der zweiten linken Schrägreihe 1, 2 .... n; die dritte Zahl der Horizontalreihe gehört zur dritten Schrägreihe 1, 3, 6 .... und ist in ihr das $n - 1^{te}$ Glied; nach Erklärung 10 muß sie also $\frac{(n-1)n}{1 \cdot 2}$ lauten; die vierte Zahl der Horizontalreihe gehört zur vierten linken Schrägreihe 1, 4, 10 .... und ist in ihr das $n - 2^{te}$ Glied; nach Erklärung 11 heißt es $\frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ usw. Daraus schließen wir, daß die n^{te} Horizontalreihe lautet:

$$1,\ n,\ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ usw.}$$

Aufgabe 11. Wie lautet die achte, wie die zehnte Horizontalreihe im Zahlendreieck?

Auflösung folgt.

Aufgabe 12. Wie heißt das sechste Glied in der neunten Horizontalreihe?

Auflösung folgt.

Aufgabe 13. Wie heißt das elfte Glied der fünfzehnten Horizontalreihe?

Auflösung folgt.

Frage 17. Wie läßt sich nun nachweisen, daß in dem nach fallenden Potenzen von a geordneten Ausdruck für $(a+b)^n$, n als positive ganze Zahl vorausgesetzt, die einzelnen Glieder mit Zahlenfaktoren behaftet sind, welche mit den Gliedern der $n^{\underline{ten}}$ Horizontalreihe des Zahlendreiecks übereinstimmen?

Antwort. Wir gehen von $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ aus und bilden daraus $(a+b)^3$, indem wir in der vorigen Gleichung beiderseits mit $a+b$ multiplizieren; rechts werde das in der Art durchgeführt, daß wir zuerst mit a multiplizieren und dann mit b, wobei gleiche Glieder unter einander gesetzt werden, dies gibt:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 2a^2b + 1ab \\ &\qquad\quad + 1a^2b + 2a^2b + b^3 \\ \hline &= a^3 + 3a^2b + 3a^2b + b^3\end{aligned}$$

Schreiben wir nun die Zahlenfaktoren an, so haben wir:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 1 & \\ & 1, & 2, & 1 \\ \hline 1, & 3, & 3, & 1, \end{array}$$

wofür wir auch setzen können 1, 1 + 2, 2 + 1, 1 wie in Erkl. 15.

In gleicher Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 1ab^3 \\ &\qquad + 1a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ \hline &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

Abgekürzt:

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 3, & 3, & 1, & \\ & 1, & 3, & 3, & 1 \\ \hline 1, & 4, & 6, & 4, & 1 \end{array}$$

oder

1, 3 + 1, 3 + 3, 3 + 1, 1 wie in Erklärung 15.

Ferner wird:

$$\begin{aligned}(a+b)^5 = a^5 &+ 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + 1ab^4 \\ &+ 1a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5 \\ \hline = a^5 &+ 5a^5b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 6^5.\end{aligned}$$

Abgekürzt:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 4, & 6, & 4, & 1 & \\ & 1, & 4, & 6, & 4, & 1 \\ \hline 1, & 5, & 10, & 10, & 5, & 1 \end{array}$$

oder

1, 1 + 4, 4 + 6, 6 + 4, 4 + 1, 1 wie in Erklärung 15.

In dieser Art könnten wir fortschreiten zu $(a+b)^6$, $(a+b)^7$ usw.; dabei erhielten wir nur eine Wiederholung der Zahlen der Beispiele in der Antwort von Frage 15.

Daraus schließen wir, daß die Zahlenfaktoren in den entwickelten Ausdrücken der Potenzen von $a+b$ geradeso gebildet werden wie die Glieder der Horizontalreihen des Zahlendreiecks.

Nach Frage 16 war die n^{te} Horizontalreihe desselben

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots ;$$

wir ziehen jetzt den Schluß, daß für jeden positiven ganzen Exponenten n die Formel gelten muss:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 + \ldots\ldots$$

---

4. III. Beweis des binomischen Lehrsatzes.

a) Einleitende Sätze über Permutationen und Kombinationen.

Aufgabe 16. Alle möglichen dreiziffrigen Zahlen darzustellen, welche sich mit den drei Ziffern 1, 2, 3 schreiben lassen.

Auflösung. Man erhält leicht die Zahlen: 123, 132, 213, 231, 312 und 321.

Farrarfund

1486. Heft.

Preis des Heftes 25 Pfg.

Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Forts. v. Heft 1480. Seite 17–32.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

I. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

—— Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas. ——

Fortsetzung von Heft 1480. – Seite 17–32.

Inhalt: Einleitende Sätze über Permutation und Kombination. – Ausführung des III. Beweises des binomischen Lehrsatzes.

Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Aufgabe 15. Ebenso mit den vier Ziffern 1, 2, 3, 4.

Auflösung. In der Zahl 123 können wir der Ziffer 4 vier verschiedene Plätze anweisen und erhalten 1234, 1243, 1423, 4123; ebenso lässt sich dieses Verfahren bei der nächsten Zahl 132 durchführen, was auf die vier weiteren Zahlen 1324, 1342, 1432 und 4132 führt. Daraus ersehen wir, daß die Aufgabe $6 \cdot 4 = 24$ verschiedene Zahlen ergeben muss.

Aufgabe 16. Wenn wir statt der vorigen Ziffern irgend welche Dinge, — wir nennen sie kurzweg Elemente — nehmen, so sollen für 2 Elemente, dann für 3 und 4 Elemente alle möglichen verschiedenen Folgen angeschrieben werden.

Auflösung. Heissen wir das erste Element a, das zweite b, so gibt es für diese 2 Elemente die Gruppen ab und ba; fügen wir noch das dritte Element c hinzu, so geben die 3 Elemente a, b, c die 6 Gruppen abc, acb, cab
bac, bca, cba.
Das vierte Element d liefert dann aus jeder der genannten 6 Gruppen, wie vorhin, 4 neue, nämlich:
$abcd$, $abdc$ usw.

Frage 18. Wie nennt man die Bildung aller möglichen Versetzungen einer bestimmten Anzahl Elemente und wie heißt man jede einzelne Gruppe?

Erkl. 16. Permutieren kommt vom lateinischen Zeitwort permutare = völlig verändern, herumdrehen, umstellen; ebenso Permutation von permutatio = Veränderung, Umtausch, Umstellung.

Antwort. Die Aufgabe, aus einer gegebenen Anzahl Elemente alle möglichen Gruppen, welche alle diese Elemente in verschiedener Reihenfolge enthalten, zu bilden, bezeichnet man kürzer: „diese Elemente zu permutieren;“ jede einzelne Gruppe wird Permutation genannt.

Frage 19. Wie viel Permutationen lassen sich aus n Elementen bilden?

Erkl. 17. Da an dieser Stelle aus der Lehre von den Permutationen und Kombinationen nur die Sätze entwickelt werden, welche zum III. Beweis des binomischen Lehrsatzes erforderlich sind, wird der Leser ersucht, die ausführliche Lehre genannter Abschnitte zu studieren in Kleyers

Antwort. Aus den 2 Elementen a und b erhalten wir die 2 Permutationen ab und ba; das dritte Element c ergibt aus ab die drei neuen abc, acb und cab und dann noch einmal drei weitere aus ba, nämlich bac, bca und cba; die drei Elemente liefern also $3 \cdot 2 = 6$ Permutationen; das vierte Element d er-

Encyclopädie; Lehrbuch der Kombinatorik von Prof. H. Staudacher.

Erkl. 18. Unter **F a k u l t ä t** versteht man in der Mathematik das Produkt einer Anzahl Faktoren, welche die aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Reihe bilden; also z. B. $a(a+d)(a+2d)(a+3d)$ Solche Produkte untersuchten **P a s c a l** und **E u l e r**. Siehe dessen Calcul differentiel II. Berlin 1755.

Als **F a k u l t ä t** im engeren Sinn wird das Produkt einer Anzahl ganzer natürlicher Zahlen, mit dem I Faktor 1, dem II Faktor 2, dem III Faktor 3 u. s. w. bezeichnet; also das Produkt $1.2.3.\ldots n$.

Die abgekürzte Bezeichnung $n!$ für $1.2.3.\ldots n$ wurde von **K r a m p** eingeführt in seinen Eléments d'Ariméthique Cologne 1808.

möglicht aus **j e d e r** der sechs vorigen Permutationen die Bildung von vier neuen; die Gesamtzahl der Permutationen von 4 Elementen ist also $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Das fünfte Element e kann in jeder der vorigen 24 Gruppen an fünf verschiedene Plätze gesetzt werden; aus $abcd$ z. B. erhalten wir $abcde$, $abced$, $abecd$, $aebcd$ und $eabcd$; die Gesamtzahl der Permutationen von 5 Elementen ist somit $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$,

In dieser Art weiter schließend. folgt, daß n Elemente

$$n \cdot (n-1)(n-2) \ldots . 4 \cdot 3 \cdot 2$$

Permutationen ergeben.

Das Produkt

$$n(n-1)(n-2) \ldots .. 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

bezeichnet man kurz durch $n!$ (lies n Fakultät!). Daher der Satz:

n **E l e m e n t e l i e f e r n** $n!$ **P e r m u t a t i o n e n,**

wobei

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n \text{ ist.} \quad .. \text{№ } 3$$

Frage 19. Wie gross ist die Anzahl der Permutationen von n Elementen, wenn sich unter diesen r **g l e i c h e E l e m e n t e** befinden?

Antwort. Wir wählen zunächst einmal vier gleiche Elemente a; diese bilden nur die einzige Gruppe $aaaa$. Nun fügen wir das fünfte ungleiche Element b hinzu; letzteres gestattet fünf verschiedene Einreihungen in der vorigen Gruppe, nämlich $aaaab$, $aaaba$, $aabaa$, $abaaa$ und $baaaa$; die Zahl der Permutationen ist also jetzt $= 5$. Ein weiteres sechstes Element c liefert aus jeder der vorigen Gruppen sechs neue, von $aaaabc$ bis $cbaaaa$, die Gesamtzahl beträgt nun $6 \cdot 5 = 30$. Nehmen wir noch ein siebentes Element d, so ergibt dies aus jeder der eben genannten Gruppen sieben neue; die Zahl der Permutationen wächst hiernach an auf

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{4!}$$

Durch Verallgemeinerung folgt der **S a t z : S i n d u n t e r d e n**

n **Elementen** r **einander gleich, so ist die Zahl der Permutationen**

$$= n(n-1)(n-2)\,..\,(r+1).$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\,..\,(r+1).\,r(r-1)\,..\,3\cdot2\cdot1.}{r(r-1)(r-2)\,..\,3\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{n!}{r!}$$

Frage 20. Wie ändert sich die vorhin gefundene Zahl der Permutationen von n Elementen, wenn nicht bloß r Elemente unter sich gleich sind, sondern auch die $n-r$ andern unter sich einen gleichen Wert annehmen, der aber von dem Wert der r ersten Elemente verschieden ist?

Erkl. 19. Solche Fälle untersuchte Frénicle, Abrégé des combinations 1676 und Wallis, Treatise of algebra London 1673.

Antwort. Nehmen wir wieder den obigen Fall, daß vier gleiche Elemente a und drei ungleiche Elemente b, c, d gegeben seien. Dann können wir von den 7·6·5 Gruppen irgend eine, wie *abacdaa*, herausgreifen und aus ihr 5 neue dadurch bilden, daß wir die Elemente a in der vorigen Stellung belassen, dagegen die 3 ungleichen Elemente b, c, d permutieren; auf diese Weise erhalten wir

abadcaa, adabcaa, acadbaa, adacbaa und *acabdaa.*

Daraus ersehen wir, daß sich die 210 Permutationen in Abteilungen von je 6 Permutationen so zusammenstellen lassen, daß innerhalb jeder Abteilung die Plätze der Elemente a übereinstimmen und die Stellungen der 3 Elemente b, c und d die 6 Permutation der letzteren darstellen. Nehmen jetzt diese 3 Elemente b, c und d unter sich den gleichen Wert x an, so verschwindet innerhalb jeder Abteilung der Unterschied zwischen den seitherigen 6 Permutationen und statt 6 erhalten wir nur noch eine einzige. Setzen wir z. B. in der obigen Abteilung $b=c=d=x$, so gehen die aufgeführten sechs Permutationen über in die eine: *axaxxaa.* Daraus folgt, daß der Übergang der 3 Elemente b, c, d zum gleichen Wert x die Gesamtzahl 120 der Permutation auf den sechsten Teil verringert. Wir dürfen daher schließen, daß wenn

unter n Elementen r gleiche sind und die übrigen $n-r$ auch unter sich übereinstimmen, die Anzahl der Permutationen $= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ ist.

Aufgabe 17. Welche Mischungen lassen sich aus den vier Farben: Rot (R), Orange (O), Grün (G) und Blau (B) herstellen, wenn zuerst nur zwei und dann drei Farben zur Anwendung gelangen?

Auflösung. Die aus 2 Farben bestehenden Mischungen sind RO, RG, RB, OG, OB, und GB; ihre Zahl ist also 6. Dagegen lassen sich aus 3 Farben die vier Mischungen bilden: ROG, ROB, RGB und OGB.

Aufgabe 18. Aus den 4 Elementen a, b, c, d alle möglicher Verbindungen zu bilden, welche sich aus 2 Elementen machen lassen; dabei sollen aber Formen, welche ganz dieselben Elemente enthalten, nur für eine gerechnet werden; hierauf sollen dann in gleicher Weise alle Verbindungen aus 3 Elementen hergestellt werden.

Auflösung. Aus 2 Elementen erhalten wir: ab, ac, ad, bc, bd und cd; dagegen aus 3 Elementen:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd,$$

denn die Permutationen von irgend einer dieser Formen z. B. von abc zählen nicht besonders.

Frage 21. Wie nennt man die Bildung aller möglichen Verbindungen, welche sich aus n Elementen in der Weise herstellen lassen, daß man zu jeder Verbindung nur r Elemente verwendet mit der Bedingung, daß die Permutationen aus den letzteren nur als eine Verbindung zu rechnen sind?

Erkl. 20. Kombinieren und Kombination stammt vom lateinischen combinare = zusammenbringen, vereinigen.

Antwort. Wenn wir aus n Elementen alle möglichen Verbindungen aus je r dieser n Elementen machen und die Permutationen dieser r Elemente als nur eine Verbindung rechnen, so bilden wir aus n Elementen die Kombinationen von r Elementen; jede solche Verbindung heißt nämlich eine Kombination von r Elementen oder eine Kombination der r^{ten} Klasse.

Frage 22. Wie heißen von den 4 Elementen a, b, c, d die verschiedenen Kombinationen und wie heißen sie von den 5 Elementen a, b, c, d, e?

Antwort. Nehmen wir zuerst die vier Elemente a, b, c, d, so heißen die:

4 Kombinationen der I Klasse: a, b, c, d
6 „ „ II „ ab, ac, ad, bc, bd, cd
4 „ „ III „ abc, abd, acd, bcd
1 „ „ IV „ $abcd$

Wählen wir die fünf Elemente a, b, c, d, e, so folgt:

$K_1 = a, b, c, d, e = 5$
$K_2 = ab, ac, ad, ae, bc, bd; be, cd, ce, de = 10$
$K_3 = abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde = 10$
$K_4 = abcd, abce, abde, acde, bcde = 5$
$K_5 = abcde = 1.$

Dieses Ergebnis läßt sich schematisch darstellen in folgender Weise:

1) K_1 d. h. die Kombinationen der I Klasse ergeben:

K_1	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0	0
b	0	1	0	0	0
c	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	1

2) K_2, d. h. die Kombinationen der II Klasse liefern:

K_2	a	b	c	d	e
ab	1	1	0	0	0
ac	1	0	1	0	0
ad	1	0	0	1	0
ae	1	0	0	0	1
bc	0	1	1	0	0
bd	0	1	0	1	0
be	0	1	0	0	1
cd	0	0	1	1	0
ce	0	0	1	0	1
de	0	0	0	1	1

3) K_3 d. h. die Kombinationen der III Klasse ergeben:

K_3	a	b	c	d	e
abc	1	1	1	0	0
abd	1	1	0	1	0
abe	1	1	0	0	1
acd	1	0	1	1	0
ace	1	0	1	0	1
ade	1	0	0	1	1
bcd	0	1	1	1	0
bce	0	1	1	0	1
bde	0	1	0	1	1
cde	0	0	1	1	1

4) K_4 d. h. die Kombinationen der IV Klasse liefern:

K_4	a	b	c	d	e
$abcd$	1	1	1	1	0
$abce$	1	1	1	0	1
$abde$	1	1	0	1	1
$acde$	1	0	1	1	1
$bcde$	0	1	1	1	1

Endlich gibt K_5, d. h. die einzige Kombination der V Klasse:

K_5	a	b	c	d	e
$abcde$	1	1	1	1	1

Frage 23. Welcher Schluß läßt sich aus dieser schematischen Darstellung ziehen?

Antwort. In der schematischen Darstellung erscheinen die Kombinationen der ersten Klasse als die Permutationen von e i n e m Element 1 und v i e r Elementen 0, jene der 2^{ten} Klasse als die Permutationen von z w e i Elementen 1 und d r e i Elementen 0, jene der 3^{ten} Klasse als die Permutationen von d r e i Elementen 1 und z w e i Elementen 0 u. s. w. S o m i t i s t d i e A n z a h l d e r K o m b i n a t i o n e n j e d e r K l a s s e g l e i c h d e r

Anzahl der betreffenden Permutationen, also hier nach Frage 20:

$$K_1 = \frac{5!}{1!\ 4!} = 5;\ K_2 = \frac{5!}{2!\ 3!} = 10;$$

$$K_3 = \frac{5!}{3!\ 2!} = 10;\ K_4 = \frac{5!}{4!\ 1!} = 5!$$

$$K_5 = 1.$$

Frage 24. Wieviel gibt es hiernach von n Elementen Kombination der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Klasse?

Antwort. Diese Kombinationen lassen sich in der vorigen Weise schematisch darstellen, als die Permutationen von n Elementen 1 und 0 und zwar müssen r Elemente $= 1$ und die $n-r$ Elemente $= 0$ angenommen werden. Nach Frage 20 gibt es solcher Permutationen $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$; dieser Ausdruck liefert uns hiernach auch die Zahl der Kombination von n Elementen der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Klasse.

Frage 25. Welche Folgerung gestattet der eben gefundene Ausdruck $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ für die Zahl der Kombinationen der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Klasse von n Elementen?

Antwort. Da $\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ ist, der letztere Ausdruck aber die Zahl der Kombinationen der $n-r^{\underline{\underline{ten}}}$ Klasse darstellt, so folgt, daß die Zahl der Kombinationen der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Klasse gleich der Zahl der Kombinationen der $n-r^{\underline{\underline{ten}}}$ Klasse ist.

Im obigen Beispiel der Frage 23 hatten wir 5 Elemente und es war:

$$K_1 = K_4 = 5;\ K_2 = K_3 = 10.$$

Aufgabe 19. Es soll der Ausdruck

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

vereinfacht werden.

Auflösung. Es ist:

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots.3\cdot 2\cdot 1$$

$$r! = r\,(r-1)\,(r-2)\ldots.3\cdot 2\cdot 1$$

$$(n-r)! = (n-r)\,(n-r-1)\ldots.3\cdot 2\cdot 1$$

Daher:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)\,(n-r)\,(n-r-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(r-1)\cdot r\cdot(n-r)\,(n-r-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1},$$

also ist:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots\cdot r}\quad\ldots\ \text{№ } 4.$$

Hiefür hat man die abgekürzte Bezeichnung $\binom{n}{r}$ eingeführt, welche „n über r“ gelesen wird.

Also haben wir:

$$\binom{n}{r}=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(r-1)\,r}\quad\ldots\ \text{№ } 5.$$

Erkl. 21. Diese Bezeichnung $\binom{n}{r}$ stammt von **Euler**; sie findet sich in dessen nachgelassenen Abhandlungen. Statt $\binom{n}{r}$, schreibt man heute auch manchmal n_r.

So ist z. B. für $n=5$ und $r=3$:

$$\frac{5!}{3!\,2!}=\binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10;$$

ferner für $n=5$ und $r=4$:

$$\frac{5!}{4!\,1!}=\binom{5}{4}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=5;$$

für $n=7$ und $r=3$:

$$\frac{7!}{3!\,4!}=\binom{7}{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35 \text{ usw.}$$

Aufgabe 20. Zeige, daß $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$ ist.

Auflösung. Da nach der obigen Definition $\binom{n}{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ und $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ ist, ergibt sich sofort die Gleichheit der linken Seiten.

Somit ist:

$$\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}\quad\ldots\ \text{№ } 6.$$

Hienach ist $\binom{5}{3}=\binom{5}{2}$; oder $\binom{7}{3}=\binom{7}{4}$; $\binom{8}{2}=\binom{8}{6}$ usw.

Aufgabe 21. Zeige noch, daß

$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}$ ist.

Auflösung. Es wird:

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!\,(n-r+1)}+\frac{n!}{(r-1)!\,r\,(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left\{\frac{1}{n-r+1}+\frac{1}{r}\right\}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left\{\frac{r}{(n-r+1)r}+\frac{n-r+1}{(n-r+1)r}\right\}$$

$$=\frac{n!\,(n+1)}{(r-1)!\,r\,(n-r)!\,(n-r+1)}=\frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$=\binom{n+1}{r}.$$

Hiernach haben wir jetzt:

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r} \quad ..\text{№}7.$$

Z. B. ist:

$$\binom{7}{3}+\binom{7}{4}=\binom{8}{4}$$

$$\binom{10}{2}+\binom{10}{3}=\binom{11}{3} \text{ usw.}$$

Frage 26. Wie groß ist hienach die Anzahl der Kombinaten der r^{ten} Klasse von n Elementen?

Antwort. Wenn wir diese Zahl mit K_r^n bezeichnen, so ist

$$K_r^n=\binom{n}{r}.$$

Frage 27. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Kombinationszahlen der $r-1^{\text{ten}}$ und der r^{ten} Klasse von n Elementen einerseits und der Kombinationszahl der r^{ten} Klasse von $n+1$ Elementen?

Antwort. Da $K_{r-1}^{\;n}=\binom{n}{r-1}$, $K_r^n=\binom{n}{r}$, $K_r^{n+1}=\binom{n+1}{r}$ und

nach der vorigen Aufgabe $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ ist, so hat man:

$$K^n_{r-1} + K^n_r = K^{n+1}_r.$$

Z. B. ist:

$$K^5_3 + K^5_4 = K^6_4$$

$$K^7_5 + K^7_6 = K^8_6 \text{ usw.}$$

---

b) Ausführung des III. Beweises des binomischen Lehrsatzes.

Frage 28. Die Bestimmung des dem Binom $(a+b)^n$ entsprechenden Ausdrucks — n wieder als eine positive ganze Zahl gedacht — ist ein spezieller Fall von welcher Aufgabe?

Antwort. Wir können die Entwicklung von $(a+b)^n$ als einen besonderen Fall der Berechnung eines Produktes von der Form $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+m)$ ansehen, in welchem wir n Klammerfaktoren miteinander zu multiplizieren haben. Hiernach erhalten wir $(a+b)^n$, wenn wir in dem genannten Produkt die Zahl x durch die Zahl a ersetzen und den Zahlen $a, b, c \ldots m$ den gemeinschaftlichen Wert b geben.

Frage 29. Wie erhalten wir den ausgerechneten Wert des Produktes $(x+a)(x+b)$, ferner von $(x+a)(x+b)(x+c)$, von $(x+a)(x+b)(x+c)(c+d)$ und noch von $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$?

Antwort. Auf dem gewöhnlichen Weg des Ausmultiplizierens erhalten wir:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc + bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) = x^5 + (a+b+c+d+e)x^4 + (ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)x^3 + (abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde)x^2 + (abcd+abce+acde+bcde)x + abcde.$$

Suchen wir nach einem allen diesen Entwicklungen gemeinsamen Bildungsgesetz, so sehen wir zunächst, daß sämtliche Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichen aus Gliedern bestehen, welche nach fallenden Potenzen von x fortschreiten. Das erste Glied ist in jedem Fall diejenige Potenz von x, deren Exponent mit der Anzahl der Klammerfaktoren auf der linken Seite des Gleichheitszeichens übereinstimmt. Jedes folgende Glied besteht aus einer Potenz von x und einem Klammerkoeffizienten. Diese Klammerkoeffizienten lassen sich alle aus den Größen $a, b, c \dots$ herstellen, und zwar in der Weise, daß wir aus ihnen die Kombinationen der ersten Klasse, also $a, b, c \dots$ usw.; dann die Kombinationen der zweiten Klasse — $ab, ac, ad \dots$ usw. — etc. bilden, hierauf diese Kombinationen als Produkte betrachten und die aus jeder Klasse hervorgegangenen Produkte zusammenzählen. Das letzte Glied enthält so das Produkt sämtlicher Größen $a, b, c \dots$ mit x^0 oder ohne x. Betrachten wir z. B. den oben ausgeführten Fall

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$$

und setzen:

$$S_1 = a+b+c+d+e$$
$$S_2 = ab+ac+\dots\dots+de$$
$$S_3 = abc+abd+\dots\dots+cde$$
$$S_4 = abcd+abce+\dots+bcde$$
$$S_5 = abcde,$$

so können wir schreiben:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) = x^5 + S_1 x^4 + S_2 x^3 + S_3 x^2 + S_4 x + S_5.$$

Frage 30. Wenn wir das vorhin gefundene Bildungsgesetz als allgemein giltig annehmen, wie stellt sich das Binom

Antwort. Setzen wir zur Vereinfachung:

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)..(x+m)$ dar, wenn wir n Größen $a, b, c \ldots m$ nehmen und also auch n binomische Faktoren?

$$S_1 = a+b+c+d \ldots\ldots + m$$
$$S_2 + ab + ac \ldots\ldots + lm$$
$$S_3 = abc + abd + \ldots\ldots + klm$$
$$S_4 = abcd + abce + \ldots + iklm$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$S_n = abcd \ldots\ldots m;$$

so stellt sich, die allgemeine Giltigkeit des vorhin genannten Gesetzes vorausgesetzt, unser Binom aus n Faktoren dar in der Form:

$$(x+a)(x+b)\ldots(x+m) = x^n + S_1 x^{n-1} + \ldots S_2 x^{n-2} + S_3 x^{n-3} + \ldots + S_{n-1} x + S_n.$$

Frage 31. In welcher Weise vereinfacht sich der soeben gewonnene Ausdruck, wenn wir die n Größen $a, b, c \ldots m$ alle unter sich gleich groß annehmen, also wenn wir setzen: $a = b = c = d \ldots = m$?

Antwort. Zunächst erhalten wir statt des Produktes $(x+a)\,x+b)\ldots(x+m)$ durch die genannte Gleichsetzung $(x+a)(x+b)\ldots(x+m) = (x+a)^n$. Betrachten wir nun die rechte Seite, so bleiben x^n, $x^{n-1} \ldots x$ unverändert; dagegen gehen $S_1, S_2 \ldots S_n$ in einfachere Ausdrücke über. Zunächst wird

$$S_1 = a+b+c+\ldots+m$$

übergehen in

$$S_1 = a+a+\ldots+a = na.$$

In $S_2 = ab + ac + \ldots + lm$ haben wir so viele Glieder als es von n Elementen Kombination der zweiten Klasse gibt; die Anzahl derselben ist nach Frage 26 $K_2^n = \binom{n}{2}$; da jedes dieser Glieder durch unsere Gleichsetzung in $aa = a^2$ übergeht, vereinfacht sich die ganze Summe zu $\binom{n}{2} a^2$. In $S_3 = abc + abd + \ldots\ldots + klm$ beträgt die Anzahl der Glieder $\binom{n}{3}$, denn von n Elementen gibt es $K_3^n = \binom{n}{3}$ Kombinationen und da jedes Glied sich auf $aaa = a^3$ reduziert, läßt

sich die neue Summe schreiben: $S_3 = \binom{n}{3} a^3$. Auf diese Weise weiter schreitend, erhalten wir:

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} a^3 + \dots$$
$$+ \binom{n}{r} x^{n-r} a^r + \dots + \binom{n}{n-1} x a^{n-1} + a^n.$$

Frage 32. Wie läßt sich nun die allgemeine Giltigkeit der vorigen Formel streng beweisen?

Antwort. Wir wenden wie in Frage 10 den Schluß von n auf $n+1$ an. D. h. wir zeigen zuerst, daß, wenn der Satz für irgend eine beliebige ganze Zahl n gilt, er auch für die folgende Zahl $n+1$ Giltigkeit hat; dann sehen wir nach, ob es einen speziellen Fall von n gibt, für welchen der Satz wahr ist, und wenn ein spezieller Fall gefunden ist, so schließen wir von ihm aus auf die Giltigkeit der anderen Fälle.

Setzen wir voraus, daß die oben angeführte Formel für eine beliebige ganze Zahl n richtig sei, so wollen wir nun zuerst beweisen, daß sie auch für $n+1$ gelten muß. Wir können aus $(x+a)^n$ auf zweierlei Weise $(x+a)^{n+1}$ ableiten, einmal dadurch, daß wir, da $(x+a)^{n+1} = (x+a)^n (x+a)$ ist, den vorigen Ausdruck rechter Hand mit $x+a$ multiplizieren; ferner auch noch dadurch, daß wir in dem vorigen Ausdruck für $(x+a)^n$ vom Exponenten n zu dem neuen Exponenten $n+1$ übergehen und also das Gesetz, welches wir für n Faktoren $x+a$ gefunden haben, jetzt auf $n+1$ Faktoren anwenden. Sehen wir nun nach, was wir auf diese zwei Arten für $(x+a)^{n+1}$ erhalten.

Wir multiplizieren zuerst links und rechts mit $(x+a)$ durch; dies gibt:

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + \binom{n}{1}x^n a + \binom{n}{2}x^{n-1}a^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{r}x^{n-r+1}a^r$$

$$+ \ldots\ldots + \binom{n}{n-1}x^2 a^{n-1} + xa^n + x^n a + \binom{n}{1}x^{n-1}a^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \binom{n}{r-1}x^{n-r+1}a^r + \ldots\ldots + \binom{n}{n-2}x^2 a^{n-1} + \binom{n}{n-1}xa^n + a^{n+1},$$

oder durch Zusammenfassung:

$$x+a)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n a + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\}x^{n-1}a^2 + \ldots$$

$$+ \left\{\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right\}x^{n-r+1}a^r + \ldots + \left\{\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}\right\}x^2 a^{n-1}$$

$$+ \left\{\binom{n}{n-1} + 1\right\}xa^n + a^{n+1}.$$

Nach Aufgabe 21 ist aber:

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r},$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}; \quad \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$$

$$\binom{n}{n-1} + 1 = \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n}$$

$$n+1 = \binom{n+1}{1}.$$

Hienach läßt sich unser Ausdruck schreiben:

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n a + \binom{n+1}{2}x^{n-1}a^2 \ldots\ldots$$

$$+ \binom{n+1}{r}x^{n+1-r}a^r + \ldots + \binom{n+1}{n-1}x^2 a^{n-1} + \binom{n+1}{n}xa^n + a^{n+1}$$

Nun haben aber beide Seiten diejenigen Formen angenommen, welche aus dem Ausdruck für $(x+a)^n$ werden, wenn wir von dem

Exponenten n zu den um eine Einheit größeren Exponenten $n+1$ übergehen, d. h. wenn wir das für n Faktoren $x+a$ gefundene Gesetz für $n+1$ Faktoren $x+a$ anschreiben.

Aus dieser Übereinstimmung schließen wir nun, daß, wenn die Formel für $(x+a)^n$ richtig ist, sie auch für $(x+a)^{n+1}$ Giltigkeit hat.

Nun aber liefert die direkte Ausrechnung:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$$

oder

$$(x+a)^4 = x^4 + \binom{4}{1}x^3a + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}xa^3 + a^4$$

Erkl. 22. Die Binomialkoeffizienten und den binomischen Lehrsatz für positive ganze Exponenten, sowie für beliebige reelle Exponenten hat Newton gefunden und in den Briefen an Oldenburg, 13. Juni und 24. Oktober 1676, mitgeteilt.

Die Formel gilt hiernach sicher für 2, 3 und 4 Faktoren $x+a$; also muß sie auch gelten für 5; hat sie für 5 Faktoren Giltigkeit, so hat sie dieselbe auch für 6 usw. bis ins Unendliche.

Hiemit ist die allgemeine Giltigkeit nachgewiesen.

Vertauschen wir in unserer Formel den Buchstaben x mit a und ersetzen den seitherigen Buchstaben a durch b, so geht $x+a$ über in $a+b$ und wir erhalten nun die für jede ganze Zahl n giltige Formel des binomischen Lehrsatzes:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

$$+ \ldots\ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \quad \ldots\ldots\ldots \text{№ } 8.$$

Frage 33. Wie lautet hienach die Formel für $(a-b)^n$?

Antwort. Wir schreiben unser Gesetz zunächst für $(a+c)^n$ an und erhalten:

$$(a+c)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} c + \binom{n}{2} a^{n-2} c^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a c^{n-1} + c^n$$

Setzen wir jetzt:

$$c = -b,\quad c^2 = (-b)^2 = +b^2,$$
$$c^3 = (-b)^3 = -b^3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c^r = (-b)^r = (-1)^r b^r;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c^n = (-b)^n = (-1)^n b^n,$$

so folgt, da $a+c$ in $a-b$ übergeht:

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots$$
$$+ (-1)^r \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \ldots + (-1)^n b^n \;\ldots\ldots\; \text{№ } 9.$$

Es werden also die Glieder negativ, welche b mit einem **ungeraden** Exponenten enthalten.

---

5. Aufgaben über den binomischen Lehrsatz samt Auflösungen.

Aufgabe 22. Wieviel Glieder hat die Entwicklung von $(a+b)^{20}$?

Auflösung. Wir erhalten:

$$(a+b)^{20} = a^{20} + \binom{20}{1} a^{19} b + \cdots + \binom{20}{19} a b^{19} + b^{20};$$

die Anzahl der Glieder ist also $= 21$.

Aufgabe 23. Entwickle nach dem binomischen Lehrsatz $(r+s)^6$.

Auflösung. Es ist:

$$(r+s)^6 = r^6 + \binom{6}{1} r^5 s + \binom{6}{2} r^4 s^2 + \binom{6}{3} r^3 s^3 + \binom{6}{4} r^2 s^4 + \binom{6}{5} r s^5 + s^6$$

$$= r^6 + 6r^5 s + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} r^4 s^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 s^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^2 s^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r s^5 + s^6$$

$$= r^6 + 6 r^5 s + 15 r^4 s^2 + 20 r^3 s^3 + 15 r^2 s^4 + 6 r s^5 + s^6.$$

Yarrangend M. ...

1489. Heft.

Preis des Heftes 25 Pfg.

Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Forts. v. Heft 1486. Seite 33–48.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, **Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

I. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.
II. Der polynomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.
Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Fortsetzung von Heft 1486. – Seite 33–48.

Inhalt: Gelöste Aufgaben über den binomischen Lehrsatz. – Ungelöste Aufgaben über den binomischen Lehrsatz. – Erläuternde Fragen mit Antworten über ein Polynom und den polynomischen Lehrsatz im allgemeinen.

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Aufgabe 24. Desgleichen $(p+q)^{10}$.

Auflösung. Es ist:

$$(p+q)^{10} = p^{10} + \binom{10}{1} p^9 q + \binom{10}{2} p^8 q^2 + \binom{10}{3} p^7 q^3 + \binom{10}{4} p^6 q^4$$
$$+ \binom{10}{5} p^5 q^5 + \binom{10}{6} p^4 q^6 + \binom{10}{7} p^3 q^7 + \binom{10}{8} p^2 q^8 + \binom{10}{9} p q^9 + q^{10}.$$

Nun ist:

$$\binom{10}{1} = 10; \quad \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45; \quad \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120;$$
$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210; \quad \binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252;$$
$$\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210: \quad \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120; \quad \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45;$$
$$\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10;$$

Daher ist:

$$(p+q)^{10} = p^{10} + 10p^9 q + 45p^8 q^2 + 120p^7 q^3 + 210p^6 q^4 + 252p^5 q^5$$
$$+ 210p^4 q^6 + 120p^3 q^7 + 45p^2 q^8 + 10p q^9 + q^{10}.$$

Aufgabe 25. Was ist $(1+x)^7$?

Auflösung.

$$(1+x)^7 = 1^7 + \binom{7}{1} 1^6 x + \binom{7}{2} 1^5 x^2 + \binom{7}{3} 1^4 x^3 + \binom{7}{4} 1^3 x^4 + \binom{7}{5} 1^2 x^5$$
$$+ \binom{7}{6} 1 \cdot x^6 + x^7$$

Nun ist:

$$\binom{7}{1} = 7; \quad \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21; \quad \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35; \quad \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35;$$
$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21; \quad \binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7;$$

Hieraus folgt:

$$(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7.$$

Aufgabe 26. Was ist $(a-b)^5$?

Auflösung. $(a-b)^5$, nach der Formel für $(a-b)^n$ entwickelt ergibt:

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 - \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} ab^4 - b^5$$

oder:

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Aufgabe 27. Entwickle $(z-1)^9$.

Auflösung. Es wird:

$$(z-1)^9 = z^9 - \binom{9}{1} z^8 . 1^1 + \binom{9}{2} z^7 . 1^2 - \binom{9}{3} z^6 . 1^3 + \binom{9}{4} z^5 . 1^4 - \binom{9}{5} z^4 . 1^5$$

$$+ \binom{9}{6} z^3 . 1^6 - \binom{9}{7} z^2 . 1^7 + \binom{9}{8} z . 1^8 - 1^9 = z^9 - \binom{9}{1} z^8 + \binom{9}{2} z^7 - \binom{9}{3} z^6$$

$$+ \binom{9}{4} z^5 - \binom{9}{5} z^4 + \binom{9}{6} z^3 - \binom{9}{7} z^2 + \binom{9}{8} z - 1$$

$$= z^9 - 9z^8 + 36z^7 - 84z^6 + 126z^5 - 126z^4 + 84z^3 - 36z^2 + 9z - 1.$$

Aufgabe 28. Entwickle $(1-u)^8$.

Auflösung. Wir erhalten hier:

$$(1-u)^8 = 1^8 - \binom{8}{1} 1^7 . u + \binom{8}{2} 1^6 . u^2 - \binom{8}{3} 1^5 . u^3 + \binom{8}{4} 1^4 . u^4 - \binom{8}{5} 1^3 . u^5$$

$$+ \binom{8}{6} 1^2 . u^6 - \binom{8}{7} 1 . u^7 + u^8.$$

Da nun $\binom{8}{1} = 8$; $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$; $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$;

$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$; $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$; $\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28$; $\binom{8}{7} = 8$ ist,

so folgt:

$$(1-u)^8 = 1 - 8u + 28u^2 - 56u^3 + 70u^4 - 56u^5 + 28u^6 - 8u^7 + u^8.$$

Aufgabe 29. Berechne $(a+b)^n + (a-b)^n$.

Auflösung. Da

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots\cdots$$

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots\cdots,$$

so fallen bei der Addition alle Glieder, in welchen b mit einem ungeraden Exponenten auftritt, heraus, während sich alle übrigen Glieder verdoppeln. Hienach erhalten wir:

$$(a+b)^n + (a-b)^n$$

$$= 2\left\{ a^n + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 + \binom{n}{6} a^{n-6} b^6 + \cdots \right\}$$

Aufgabe 30. Berechne $(c+d)^6 + (c-d)^6$.

Auflösung. Nach der Formel der vorigen Aufgabe muß sein:

$$(c+d)^6 + (c-d)^6 = 2\left\{ c^6 + \binom{6}{2} c^4 d^2 + \binom{6}{4} c^2 d^4 + d^6 \right\}$$

$$= 2\left\{ c^6 + 15\, c^4 d^2 + 15\, c^2 d^4 + d^6 \right\} = 2\, c^6 + 30\, c^4 d^2 + 30\, c^2 d^4 + 2\, d^6.$$

Aufgabe 31. Was wird $(1+m)^7 + (1-m)^7$?

Auflösung. Wie vorhin folgt:

$$(1+m)^7 + (1-m)^7 = 2\left\{ 1 + \binom{7}{2} m^2 + \binom{7}{4} m^4 + \binom{7}{6} m^6 \right\}$$

$$= 2\left\{ 1 + 21\, m^2 + 35\, m^4 + 7\, m^6 \right\} = 2 + 42\, m^2 + 70\, m^4 + 14\, m^6.$$

Aufgabe 32. Was erhalten wir für $(a+b)^n - (a-b)^n$?

Auflösung. Wenn wir in Aufgabe 29 den zweiten der angeschriebenen Ausdrücke vom oberen abziehen, so fallen die Glieder, in welchen b mit einem geraden Exponenten behaftet ist, heraus, während die Glieder, welche b mit ungeraden Exponenten enthalten, sich verdoppeln. Daraus folgt:

$$(a+b)^n - (a-b)^n$$

$$= 2\left\{ \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 + \cdots\cdots \right\}$$

Aufgabe 33. Berechne $(x+y)^{10} - (x-y)^{10}$!

Auflösung. Vorige Formel gibt:

$$(x+y)^{10} - (x-y)^{10}$$

$$= 2\left\{\binom{10}{1} x^9 y + \binom{10}{3} x^7 y^3 + \binom{10}{5} x^5 y^5 + \binom{10}{7} x^3 y^7 + \binom{10}{9} x y^9\right\}$$

$$= 2\left\{10\,x^9 y + 120\,x^7 y^3 + 252\,x^5 y^5 + 120\,x^3 y^7 + 10\,x y^7\right\}$$

$$= 20\,x^9 y + 240\,x^7 y^3 + 504\,x^5 y^5 + 240\,x^3 y^7 + 20\,x y^7$$

Aufgabe 34. Berechne $(1+c)^6 - (1-c)^6$!

Auflösung. Hier folgt:

$$(1+c)^6 - (1-c)^6 = 2\left\{\binom{6}{1} 1^5 c + \binom{6}{3} 1^3 c^3 + \binom{6}{5} 1 \cdot c^5\right\}$$

$$= 2\left\{6c + 20c^3 + 6c^5\right\} = 12c + 40c^3 + 12c^5.$$

Aufgabe 35. Was wird: $(a+1)^9 - (a-1)^9$?

Auflösung. Nach obiger Formel muß sein:

$$(a+1)^9 - (a-1)^9$$

$$= 2\left\{\binom{9}{1} a^8 \cdot 1^1 + \binom{9}{3} a^6 \cdot 1^3 + \binom{9}{5} a^4 \cdot 1^5 + \binom{9}{7} a^2 \cdot 1^7 + 1^9\right\}$$

$$= 2\left\{9a^8 + 84a^6 + 126a^4 + 36a^2 + 1\right\} = 18a^8 + 168a^6 + 252a^4 + 72a^2 + 2.$$

Aufgabe 36. Wie lautet das 8^{te} Glied der Entwicklung von $(a+n)^{11}$?

Auflösung. Das I. Glied ist a^{11}, das II. $\binom{11}{1} a^{10} b$, das III. $\binom{11}{2} a^9 b^2$, das IV. $\binom{11}{3} a^8 b^3$ usw. Hierauf muß das VIII. Glied lauten:

$$\binom{11}{7} a^4 b^7 = \binom{11}{4} a^4 b^7 = 330 a^4 b^7.$$

Aufgabe 37. Wie lautet das $9^{\underline{\text{te}}}$ Glied von $(x-y)^{14}$?

Auflösung. Das I. Glied ist hier x^{14}, das II. $-\binom{14}{1}x^{13}y$, das III. $+\binom{14}{2}x^{12}y^2$, das IV. $-\binom{14}{3}x^{11}y^3$ usw. Für das neunte Glied erhalten wir hiernach: $+\binom{14}{8}x^6y^8$ $=\binom{14}{6}x^5y^8 = 3003\,x^6y^7$.

Aufgabe 38. Wie heißt der $r^{\underline{\text{te}}}$ Binomialkoeffizienten von $(a+b)^n$?

Auflösung. Das I. Glied von $(a+b)^n$ lautet nach Formel № 4 a^n, das zweite $\binom{n}{1}a^{n-1}b$, das dritte $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$ usw.; da die Zahlenfaktoren $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ usw. die Binomialkoeffizienten heißen: so ist der erste $\binom{n}{1}=n$, der zweite $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, der dritte $\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ usw., somit ist der $r^{\underline{\text{te}}}$ Binomialkoeffizient $\binom{n}{r}$

Aufgabe 39. Wie heißt der $8^{\underline{\text{te}}}$ Binomialkoeffizient von $(a+b)^{19}$?

Auflösung. Nach der vorigen Aufgabe ist derselbe $=\binom{19}{8}=75582$.

Aufgabe 40. Wie heißen die Koeffizienten von a^6b^4 und a^3b^7 in $(a+b)^{10}$?

Auflösung. Aus der vorletzten Aufgabe ergibt sich, daß in $(a+b)^{10}$ der Koeffizient von $a^6b^4=\binom{10}{4}=210$ ist; ebenso folgt für den Koeffizienten von a^3b^7 die Zahl $\binom{10}{7}=\binom{10}{3}=120$.

Aufgabe 41. Wie heißt in der Entwicklung von $(a+b)^n$ das fünfte Glied, und welches Glied hat den gleichen Koeffizienten?

Auflösung. Nach der Formel № 4 heißt das fünfte Glied $\binom{n}{4}a^{n-4}b^4$; da nach Formel № 2 $\binom{n}{4}=\binom{n}{n-4}$ ist, so hat das $n-3^{\underline{\text{te}}}$ Glied $\binom{n}{n-4}a^4b^{n-4}$ den gleichen Koeffizienten wie das fünfte Glied.

Aufgabe 42. Wie heißt in der Entwicklung von $(a+b)^n$ das $r^{\underline{\text{te}}}$ Glied, und wie dasjenige, welches den gleichen Koeffizienten hat?

Auflösung. Nach Formel № 4 ist das $r^{\underline{\text{te}}}$ Glied $\binom{n}{r-1}a^{n+1-r}b^{r-1}$; da ferner nach Formel № 2 $\binom{n}{r-1}$ $=\binom{n}{n+1-r}$ ist, so lautet das gesuchte Glied:

$$\binom{n}{n+1-r}a^{r-1}b^{n+1-r},$$

welches in der Entwicklung an der $n+2-r^{\underline{\text{ten}}}$ Stelle steht.

Aufgabe 43. Es soll erklärt werden, warum in $(a+b)^7$ alle Koeffizienten paarweise vorkommen; welche Folgerung läßt sich aus dieser Folgerung ziehen?

Auflösung. Die Entwicklung von $(a+b)^7$ liefert 8 Glieder; in diesen sind die Koeffizienten nach rechts und links symmetrisch; d. h. gleiche Koeffizienten haben das erste und achte Glied, das zweite und siebente, das dritte und sechste und endlich das vierte und fünfte. Hiermit ist aber die Zahl der Glieder erschöpft. — Geradeso würde sich die Sache gestalten in $(a+b)^{11}$ mit 12 Gliedern, in $(a+b)^{19}$ mit 20 Gliedern, also in allen Potenzen von $a+b$ mit ungeraden Exponenten?

Aufgabe 44. Wie gestaltet sich die Anordnung der Koeffizienten in $(a+b)^6$ und welche Folgerung läßt sich aus dieser Anordnung hieraus ziehen?

Auflösung. Wir haben:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2$$
$$+ 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6;$$

hier hat nur das mittlere Glied

$20a^3b^3$ den Koeffizienten 20, während alle anderen Koeffizienten paarweise auftreten. In gleicher Weise wird in der Entwicklung jeder **geraden** Potenz von $a+b$ wegen der ungeraden Anzahl der Glieder der Koeffizient des mittleren Gliedes nur einmal auftreten.

Aufgabe 45. Welches sind die beiden größten Koeffizienten in $(a+b)^{11}$?

Auflösung. Von den 12 Gliedern von $(a+b)^{11}$ stehen in der Mitte das sechste und siebente, die heißen $\binom{11}{5}a^6b^5$ und $\binom{11}{6}a^5b^6$, wobei $\binom{11}{5}=\binom{11}{6}=462$ ist.

Aufgabe 46. Welches ist in der Entwicklung von $(a+b)^{10}$ der größte Koeffizient?

Auflösung. In der Mitte der 11 Glieder befindet sich das sechste; dieses muß lauten:

$$\binom{10}{5}a^5b^5 = 252\,a^5b^5.$$

Aufgabe 47. Entwickle $(c+3d)^5$.

Auflösung. Wir erhalten:

$$(c+3d)^5 = c^5 + \binom{5}{1}c^4.(3d)^1 + \binom{5}{2}c^3(3d)^2 + \binom{5}{3}c^2(3d)^3 + \binom{5}{4}c(3d)^4 + (3d)^5$$
$$= c^5 + 15c^4d + 90c^3d^2 + 270c^2d^3 + 405cd^4 + 243d^5.$$

Aufgabe 48. Entwickle $(2u-3v)^6$.

Auflösung. Es wird:

$$(2u-3v)^6 = (2u)^6 - \binom{6}{1}(2u)^5.(3v) + \binom{6}{2}.(2u)^4.(3v)^2 - \binom{6}{3}(2u)^3.(3v)^3 + \binom{6}{4}(2u)^2.(3v)^4$$
$$-\binom{6}{5}2u.(3v)^5 + (3v)^6. = 64u^6 - 576u^5v + 2160u^4v^2 - 4320u^3v^3 + 4860u^2v^4$$
$$-2916uv^5 + 729v^6.$$

Aufgabe 49. Entwickle $(1+s^2)^5$.

Auflösung. Wir erhalten:

$$1+5s^2+10s^4+10s^6+5s^8+s^{10}.$$

Aufgabe 50. $\left(\frac{a}{3}-3\right)^6$ soll entwickelt werden:

Auflösung. Es wird:

$$\left(\frac{a}{3}-3\right)^6=\left(\frac{a}{3}\right)^6-6\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^5\cdot 3+15\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^4\cdot 3^2-20\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^3\cdot 3^3$$

$$+15\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2\cdot 3^4-6\cdot\left(\frac{a}{3}\right)\cdot 3^5+3^6$$

$$=\frac{a^6}{3^6}-\frac{6a^5}{3^4}+\frac{15a^4}{3^2}-20a^3+15\cdot 3^2\cdot a^2-6\cdot 3^4\cdot a+3^6.$$

$$=\frac{a^6}{729}-\frac{2a^5}{27}+\frac{5a^4}{3}-20a^3+135a^2-486a+729.$$

Aufgabe 51. Entwickle $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^8$.

Auflösung. Hier bekommen wir:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^8=(\sqrt{x})^8+\binom{8}{1}(\sqrt{x})^7\sqrt{y}+\binom{8}{2}(\sqrt{x})^6(\sqrt{y})^2+\binom{8}{3}(\sqrt{x})^5(\sqrt{y})^3$$

$$+\binom{8}{4}(\sqrt{x})^4\cdot(\sqrt{y})^4+\binom{8}{5}(\sqrt{x})^3(\sqrt{y})^5+\binom{8}{6}(\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^6+\binom{8}{7}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{y})^7+(\sqrt{y})^8$$

$$=x^4+8x^3\sqrt{xy}+28x^3y+56x^2y\sqrt{xy}+70x^2y^2+56xy^2\sqrt{xy}$$

$$+28xy^3+8y^3\sqrt{xy}+y^4.$$

Aufgabe 52. Ebenso $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^8$ $\sqrt{x}-\sqrt{y})^8$.

Auflösung. Es ist leicht einzusehen, daß wegen des Herausfallens der Glieder mit ungeraden Potenzen von $\sqrt{y}$ im vorigen Ausdruck und der Verdoppelung der übrigen Glieder als Resultat erhalten wird:

$$2(x^4+28x^3y+70x^2y^2+28xy^3+y^4).$$

Aufgabe 53. Was gibt $(a+bi)^7$?

Erkl. 23. Hier bedeutet i die Quadratwurzel aus -1, also $i=\sqrt{-1}$. Daher ist $i^2=-1$; $i^3=i^2 \,.\, i=-i$; $i^4=i^3 \,.\, i^2=+1$; $i^5=i^4 \,.\, i=+i$; $i^6=i^4 \,.\, i^2=-1$ und $i^7=i^4 \,.\, i^3=-i$.

Siehe darüber in Kleyers Encyklopädie: Lehrbuch des Rechnens mit imaginären Zahlen von R. Krüger.

Auflösung. Wir erhalten:

$$(a+bi)^7 = a^7 + 7a^6\,bi + 21a^5(bi)^2 + 35a^4(bi)^3 + 35a^3(bi)^4 + 21a^2(bi)^5 + 7a\,(bi)^6 + (bi)^7$$

$$= a^7 + 7a^6 b \,.\, i - 21a^5 b^2 - 35a^4 b^3 i + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 i - 7ab^6 - b^7 i$$

$$= a^7 - 21a^5 b^2 + 35a^3 b^4 - 7ab^6 + i(7a^6 b - 35a^4 b^3 + 21a^2 b^5 - b^7).$$

Aufgabe 54. Was wird
$(a+bi)^7+(a-bi)^7$?

Auflösung. Es liefert $(a-bi)^7$ den nämlichen komplexen Ausdruck wie $(a+bi)^7$, nur wird der imaginäre Teil negativ; bei der Addition fällt der letztere heraus und wir erhalten:

$$(a+bi)^7+(a-bi)^7$$
$$= 2\,(a^7 - 21a^5 b^2 + 35a^3 b^4 - 7ab^6).$$

Aufgabe 55. Berechne
$(1+i)^6+(1-i)^6$.

Auflösung. Wir erhalten:

$$(1 \pm i)^6 = 1 \pm 6i + 15i^2 \pm 20i^3 + 15i^4 \pm 6i^5 + i^6;$$

Hienach wird:

$$(1+i)^6+(1-i)^6 = 2\,(1+15i^2+15i^4+i^6)$$
$$= 2\,(1-15+15-1) = 0.$$

Aufgabe 56. Berechne
$(4+3i)^5-(4-3i)^5$.

Auflösung. Es ist:

$$(4 \pm 3i)^5 = 4^5 \pm 5 \,.\, 4^4 \,.\, (3i) + 10 \,.\, 4^3 \,.\, (3i)^2 \pm 10 \,.\, 4^2 \,.\, (3i)^3 + 5 \,.\, 4 \,.\, (3i)^4 \pm (3i)^5$$

Daher wird: $(4+3i)^5-(4-3i)^5$

$$= 2\{5 \,.\, 4^4 \,.\, (3i) + 10 \,.\, 4^2 \,.\, (3i)^3 + (3i)^5\}$$
$$= 2 \,.\, \{5 \,.\, 4^4 \,.\, 3 \,.\, i \,.\, - 10 \,.\, 4^2 \,.\, 3^3 \,.\, i + 3^5 \,.\, i\}$$
$$= 2\{3840i - 4320i + 243i\}$$
$$= -237i.$$

Aufgabe 57. Berechne mittelst des binomischen Lehrsatzes den Wert von $1{,}3^5$.

Auflösung. Wir setzen $1{,}3 = 1 + 0{,}3$; also $= (1 + 0{,}3)^5$. Da $(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$ ist, so folgt für $x = 0{,}3$:

$$1{,}3^5 = (1 + 0{,}3)^5 = 1 + 5 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}3^2 + 10 \cdot 0{,}3^3 + 5 \cdot 0{,}3^4 + 0{,}3^5$$

$$\begin{array}{l} = 1 \\ \, 1{,}5 \\ \, 0{,}9 \\ \, 0{,}27 \\ \, 0{,}0405 \\ \, 0{,}00243 \\ \hline = 3{,}71293 \end{array}$$

Aufgabe 58. Ebenso $1{,}01^8$ auf 7 Dezimalstellen.

Auflösung. Wir setzen $1{,}01 = 1 + 0{,}01$. Da $(1 + x)^8 = 1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + \cdots + x^8$ ist, so folgt:

$$1{,}01^8 = (1 + 0{,}01)^8 = 1 + 8 \cdot 0{,}01 + 28 \cdot 0{,}01^2 + 56 \cdot 0{,}01^3 + \cdots + 0{,}01^8.$$

$$= 1 + 0{,}08 + 0{,}0028 + 0{,}000056 + 0{,}00000070 + \cdots$$

$$= 1{,}0828567 \ldots$$

Aufgabe 59. Ebenso $0{,}99^4$.

Auflösung. Wir setzen $0{,}99 = 1 - \frac{1}{100}$; also $0{,}99^4 = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^4$. Da $(1 - x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$ ist, so folgt:

$$0{,}99^4 = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^4 = 1 - \frac{4}{100} + \frac{6}{10000} - \frac{4}{1000000} + \frac{1}{100000000} = 1{,}00060001$$

$$\begin{array}{r} -0{,}040004 \\ = 0{,}96059601 \end{array}$$

Aufgabe 60. Ebenso $\left(\frac{71}{70}\right)^8$.

Auflösung. Hier nehmen wir $\left(\frac{71}{70}\right)^8 = \left(1 + \frac{1}{70}\right)^8$

$$= 1 + \frac{8}{70} + \frac{28}{70^2} + \frac{56}{70^3} + \frac{70}{70^4} + \cdots$$

$$= \frac{70^3 + 8 \cdot 70^2 + 28 \cdot 70 + 57}{70^3} = \frac{384217}{343000}$$

$$= 1{,}1201662.$$

Aufgabe 61. Wenn a ein im Vergleich zu 1 sehr kleiner Bruch ist, was darf dann für $(1+a)^2$ genommen werden?

Erkl. 23. Das Zeichen ~ bedeutet hier angenähert oder abgerundet.

Auflösung. Da $(1+a)^2 = 1+2a+a^2$ ist, so kann unter der gemachten Voraussetzung a^2, weil sein Wert nicht mehr berücksichtigt werden muß, weggelassen werden; man erhält auf diese Weise

$$(1+a)^2 \sim 1+2a).$$

Wählen wir z. B. $a = \frac{4}{10000}$, so folgt $\left(1+\frac{4}{10000}\right)^2 \sim 1+\frac{8}{10000}$, denn das letzte Glied $\frac{4^2}{10000^2}$ soll hier als zu klein vernachlässigt werden.

Aufgabe 62. Was wird unter der vorigen Voraussetzung $(1+a)^3$?

Erkl. 24. Von diesen Annäherungsformeln $(1+a)^2$ und $(1+a)^3$ macht man Anwendung in der Lehre von der Wärme bei der Berechnung der Ausdehnung einer Platte oder eines Körpers. Siehe Kleyer, Physik. Abschnitt über Ausdehnungskoeffizienten bei der Erwärmung.

Auflösung. Da

$$(1+a)^3 = 1^3 + 3a + 3a^2 + a^3$$

ist, so können in dem Fall, daß a einen sehr kleinen Wert besitzt, die beiden Glieder $3a^2$ und $3a^3$ vernachlässigt werden; dadurch erhalten wir

$$(1+a)^3 \sim 1+3a,$$

Als Beispiel erwählen wir $a = \frac{5}{10000}$ und erhalten:

$$\left(1+\frac{5}{10000}\right)^3 \sim 1+\frac{15}{10000};$$

denn man sieht leicht, daß die beiden Glieder $3\left(\frac{5}{10000}\right)^2$ und $\left(\frac{5}{10000}\right)^3$ äußerst klein ausfallen würden.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 63. Wieviel Glieder hat die Entwicklung von $(a+b)^{85}$?

Aufgabe 64. Desgleichen $(r+1)^{47}$?

Aufgabe 65. Entwickle nach dem binomischen Lehrsatz $(c+d)^7$.

Aufgabe 66. Ebenso $(m+n)^9$.

Aufgabe 67. Ebenso $(x+y)^{11}$.

Aufgabe 68. Was ist $(1+x)^8$?

Aufgabe 69. Entwickle $(a-b)^{12}$.

Aufgabe 70. Ebenso $(s-1)^6$.

Aufgabe 71. Ebenso $(1-t)^5$.

Aufgabe 72. Berechne
$$(r+1)^9-(r-1)^9.$$

Aufgabe 73. Ebenso
$$(1+s)^7-(1-s)^7.$$

Aufgabe 74. Ebenso
$$(x+1)^{18}-(x-1)^{18}.$$

Aufgabe 75. Wie heißt das 10te Glied von $(a+b)^{13}$?

Aufgabe 76. Wie heißt das 8te Glied von $(r-s)^{12}$?

Aufgabe 77. Welches ist der siebente Binomialkoeffizient von $(a+b)^{17}$?

Aufgabe 78. Welches ist der 17te Binomialkoeffizient von $(a-b)^{21}$?

Aufgabe 79. Wie heißen die Koeffizienten von x^7y^5 und x^3y^9 in $(x-y)^{12}$?

Aufgabe 80. Wie heißt in der Entwicklung von $(a+b)^n$ das 8te Glied und wie dasjenige, welches denselben Koeffizienten hat?

Aufgabe 81. Welches Glied hat in $(a+b)^{20}$ denselben Koeffizienten wie das 8te Glied und wie heißen diese Glieder?

Aufgabe 82. Welches Potenzprodukt hat in der Entwicklung von $(a+b)^{10}$ den gleichen Koeffizienten wie a^4b^6 und wie heißt dieser Koeffizient?

Aufgabe 83. Welche Potenz von z hat in der Entwicklung von $(1+z)^{14}$ den gleichen Koeffizienten wie z^5 und wie lautet dieser Koeffizient?

Aufgabe 84. Welches sind die beiden größten Koeffizienten in der Entwicklung von $(a+b)^{15}$ und wie heißen die zugehörigen Glieder?

Aufgabe 85. Es soll in $(a+b)^{12}$ der größte Koeffizient ermittelt werden?

Aufgabe 86. Entwickle $(x+4y)^6$.

Aufgabe 87. Ebenso $(3s-5t)^7$.

Aufgabe 88. Entwickle $(1-x^3)^8$.

Aufgabe 89. Ebenso $\left(a+\frac{1}{a}\right)^6$.

Aufgabe 90. Ebenso
$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^7.$$

Aufgabe 91. Ebenso $(1+\sqrt{z})^6$.

Aufgabe 92. Ebenso
$$(1+\sqrt{z})^5-(1-\sqrt{z})^5.$$

Aufgabe 93. Berechne
$$(a+bi)^4-(a-bi)^4.$$

Aufgabe 94. Berechne
$$(1+i)^7+(1-i)^7.$$

Aufgabe 95. Berechne
$$(5+2i)^8-(5-2i)^8.$$

Aufgabe 96. Berechne $1{,}2^{10}$ auf 8 Dezimalstellen.

Aufgabe 97. Berechne $1{,}02^{12}$ auf 6 Dezimalstellen.

Aufgabe 98. Berechne $1{,}003^{15}$ auf 8 Dezimalstellen.

Aufgabe 99. Entwickle und berechne nach dem binomischen Lehrsatz $\left(\frac{61}{60}\right)^7$ bis auf 6 Dezimalstellen.

Aufgabe 100. Ebenso $\left(\frac{79}{80}\right)^{12}$ bis auf 6 Dezimalstellen.

Aufgabe 101. Ebenso $1{,}0007^{10}$ auf 6 Dezimalstellen.

II. Der polynomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

I. Erläuternde Fragen mit Antworten über ein Polynom und den polynomischen Lehrsatz im allgemeinen.

Frage 34. Was ist in der Mathematik unter einem Polynom zu verstehen?

Erkl. 25. Das Wort Polynom oder Polynomium stammt vom Griechischen πολυ = viel und vom Griechischen νέμο = zuteilen, verteilen.

Antwort. In der Mathematik versteht man unter einem Polynom eine aus drei oder mehr, durch plus oder minus verbundenen Teilen bestehende Größe. Beispiele für Polynome, welche aus 3 Teilen zusammengesetzt sind — diese werden auch Trinome genannt —, sind:

$$a + b + c,\ a - b + c,\ a + \sqrt{b} - \sqrt[3]{c},$$

$$4m^2 - 5n + q;\ x^2 - 2px + q^2 \text{ usw.}$$

Polynome aus 4 Teilen bestehend haben wir in:

$$a + b + c + d,\ a - b + c - d,$$

$$4x - 5y + 8z - u,$$

$$4m^2 - 5pq + 8qr + 7s^2 \text{ usw.}$$

Frage 35. Welches ist die allgemeine Bezeichnung eines Polynoms P?

Antwort. Für ein dreiteiliges Polynom wählt man gewöhnlich die Bezeichnung $a + b + c$, für ein vierteiliges $a + b + c + d$, für ein fünfteiliges $a + b + c + d + e$; soll ein Polynom von noch mehr Teilen ausgedrückt werden, so deutet man dies durch einige an den letzten Buchstaben angehängte Punkte an, also durch

$$a + b + c + d + e + \cdots = P.$$

Frage 36. Was ist unter einer Potenz eines Polynoms mit ganzen positiven Exponenten zu verstehen?

Antwort. Unter der zweiten Potenz des Polynoms $P=a+b+c+\cdots$ versteht man das Produkt $(a+b+c+\cdots)(a+b+c+\cdots)$, das kurz mit $(a+b+c+\cdots)^2=P^2$ bezeichnet wird; ebenso ist $P^3=(a+b+c+\cdots)^3=(a+b+c+\cdots)(a+b+c+\cdots)(a+b+c+\cdots)$. Allgemein bedeutet $P^n=(a+b+c+\cdots)^n$ das Produkt aus n gleichen Faktoren $a+b+c\cdots$; hiebei stellt n eine positive ganze Zahl vor.

Frage 37. Welche Ausdrücke liefert die Algebra für die zweite Potenz eines Polynomes?

Antwort. Es wird:

$$(a+b+c)^2=\left\{(a+b)+c\right\}^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$
$$(a+b+c+d)^2=\left\{(a+b+c)+d\right\}^2$$
$$=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2\left\{ab+ac+bc+ad+bd+cd\right\}$$

Hieaus schließen wir, daß für $P=a+b+c+\cdots$,

$$P^2=(a+b+c+\cdots)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2+\cdots)+2(ab+ac+bc+\cdots)$$

Bezeichnen wir die Summe aller Quadrate durch Σa^2 und die Summe aller Produkte ab, ac usw. durch Σab, so haben wir:

$$P^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab \ldots \text{№ } 10.$$

Erkl. 26. Von diesem Ausdruck für $(a+b+c)^2$, $(a+b+c+d)^2$ usw. macht man Anwendung in der Algebra bei dem Verfahren des Ausziehens der Quadratwurzel aus allgemeinen Ausdrücken und aus Zahlen. Siehe Kleyer, Algebra.

Frage 38. Welche Ausdrücke erhält man für die dritte Potenz eines Polynoms?

Antwort. Aus

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

leiten wir zunächst ab:

$$(a+b+c)^3=\left\{(a+b)+c\right\}^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc$$
$$+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c$$
$$+ac^2+bc^2)+6abc.$$

In gleicher Weise erhalten wir:

$$(a+b+c+d)^3 = \{(a+b+c)+d\}^3 = (a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$$

$$= (a^3+b^3+c^3+d^3) + 3(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2+a^2d+b^2d+c^2d+ad^2+bd^2+cd^2) + 6(abc+abd+acd+bcd)$$

Erkl. 27. Die Formeln für die Ausdrücke von $(a+b+c)^3$, $(a+b+c+d)^3$ usw. finden Anwendung in der Algebra beim Verfahren des Ausziehens der Kubikwurzel aus allgemeinen Ausdrücken und aus Zahlen. Siehe Kleyer, Algebra.

Die erste Klammer enthält hier die Summe sämtlicher Quadrate von a, b, c und d; wir bezeichnen sie wieder durch Σa^2; die zweite enthält hier die Summe aller Produkte von der Form a^2b, c^2d usw.; — der eine Faktor ist ein Quadrat, der andere eine der anderen Größen a, b, c, d, sie soll durch Σa^2b bezeichnet werden — und die dritte Klammer enthält die Summe aller Produkte von der Form abc, abd usw. — jedes dieser Produkte hat drei verschiedene Faktoren aus der Reihe der 4 Größen a, b, c, d; wir bezeichnen sie durch Σabc. Jetzt können wir kürzer schreiben:

$$(a+b+c+d)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2b + 6\Sigma abc.$$

Gehen wir nun zur dritten Potenz des allgemeinen Polynoms $P = a + b + c + \cdots$ über, so ist leicht einzusehen, daß wir finden werden:

$$P^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2b + 6\Sigma abc, \quad \text{№ } 11.$$

wobei die Summenzeichen sich auf alle Glieder a, b, c . . . erstrecken müssen.

Frage 39. Welche Ausdrücke erhalten wir nach dem seitherigen Verfahren und mit der eingeführten abgekürzten Bezeichnung für die vierte und fünfte Potenz eines Binoms?

Antwort. Wir finden aus den Ausdrücken für $(a+b)^4$, $(a+b+c)^4$, $(a+b+c+d)^4$ usw.:

$$P^4 = \Sigma a^4 + 4\Sigma a^3 b + 6\Sigma a^2 b^2 + 12\Sigma a^2 bc + 24\Sigma abcd \quad \ldots \text{№ } 12$$

Ebenso aus $(a+b)^5$, $(a+b+c)^5$ usw.:

$$P^5 = \Sigma a^5 + 5\Sigma a^4 b + 10\Sigma a^3 b^2 + 20\Sigma a^3 bc + 30\Sigma a^2 b^2 c$$
$$+ 60\Sigma a^2 bcd + 120\Sigma abcde \quad \ldots\ldots \text{№ } 13.$$

Die ausführliche Herleitung dieser Formeln bleibe dem Leser überlassen.

Frage 40. Wie kann man hienach den Ausdruck für eine beliebig hohe ganze Potenz eines allgemeinen Polynoms oder den polynomischen Lehrsatz erhalten?

Antwort. Wir können von der vorigen fünften Potenz nach dem seitherigen Verfahren zur sechsten, siebenten usw. fortschreiten und versuchen, auf diesem Wege zu einer Formel für die n^{te} Potenz von P zu gelangen. Diese Formel, welche den Inhalt des polynomischen Lehrsatzes ausmacht, läßt sich aber, wie wir jetzt zeigen wollen, auch direkt ableiten.

---

2. I. Entwicklung des polynomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten.

Frage 41. Wie läßt sich $(a+b+c)^n$, wenn n irgend eine ganze positive Zahl vorstellt, in eine Formel entwickeln?

Antwort. Wir setzen $a+b+c = (a+b)+c$ und erhalten nach dem binomischen Lehrsatz:

$$(a+b+c)^n = \{(a+b)+c\}^n$$
$$= (a+b)^n + \binom{n}{1}(a+b)^{n-1}c + \binom{n}{2}(a+b)^{n-2}c^2$$
$$+ \binom{n}{3}(a+b)^{n-3}c^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}(a+b)c^{n-1} + c^n.$$

Wird jetzt auf die verschiedenen Potenzen von $a+b$ nochmals der

Heft 1494	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Heft 4

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist

binomische Lehrsatz angewendet, so folgt:

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^n = a^n &+ \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{2} a^{n-3} b^3 + \cdots\cdots \\
&\qquad + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \\
&+ \binom{n}{1} \left\{ a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b + \binom{n-1}{2} a^{n-3} b^2 + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \binom{n-1}{n-2} a b^{n-2} + b^{n-1} \right\} c \\
&+ \binom{n}{2} \left\{ a^{n-2} + \binom{n-2}{1} a^{n-3} b + \binom{n-2}{2} a^{n-4} b^2 + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \binom{n-2}{n-3} a b^{n-3} + b^{n-2} \right\} c^2 \\
&+ \binom{n}{3} \left\{ a^{n-3} + \binom{n-3}{1} a^{n-4} b + \binom{n-3}{2} a^{n-5} b^2 + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \binom{n-3}{n-4} a b^{n-4} + b^{n-3} \right\} c^3 + \cdots\cdot \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \binom{n}{n-2} \left\{ a^2 + 2ab + b^2 \right\} c^{n-2} \\
&+ \binom{n}{n-1} \left\{ a + b \right\} c^{n-1} + c^n \\
= a^n + b^n + c^n &+ \binom{n}{1} \left\{ a^{n-1} b + a^{n-1} c + a b^{n-1} + b^{n-1} c \right. \\
&\qquad \left. + a c^{n-1} + b c^{n-1} \right\} \\
&+ \binom{n}{2} \left\{ a^{n-2} b^2 + a^{n-2} c^2 + a^2 b^{n-2} + b^{n-2} c^2 \right. \\
&\qquad \left. + a^2 c^{n-2} + b^2 c^{n-2} \right\} \\
&+ \binom{n}{3} \left\{ a^{n-3} b^3 + a^{n-3} c^3 + a^3 b^{n-3} + b^{n-3} c^3 \right. \\
&\qquad \left. + a^3 c^{n-3} + b^3 c^{n-3} \right\} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} \left\{ a^{n-2} bc + a b^{n-2} c \right\} \\
&\qquad + \binom{n}{n-2} \binom{2}{1} a b c^{n-2} + \cdots\cdot \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}a^{n-5}b^3c^2+\binom{n}{3}\binom{n-3}{2}a^{n-5}b^2c^3$$
$$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{n-5}a^3b^{n-5}c^2$$
$$+\binom{n}{3}\binom{n-3}{n-5}a^2b^{n-5}c^3+\binom{n}{n-5}\binom{5}{2}a^2b^3c^{n-5}$$
$$+\binom{n}{n-5}\binom{5}{3}a^2b^3c^{n-5}+\cdots\cdot$$

. . . .

Frage 42. Wieviele Glieder hat dieser Ausdruck?

Antwort. Die Zahl der Glieder von $(a+b)^n$ ist $= n+1$, diejenige von $(a+b)^{n-1} = n$ usw. Demgemäß enthalten die $n+1$ Glieder der ersten Horizontalzeile den ersten Faktor c gar nicht, die n Glieder der zweiten enthalten c, die $n-1$ Glieder der dritten enthalten c^2 usw. Somit beträgt die Zahl sämtlicher Glieder:

$$(n+1)+n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdot+2+1.$$

Nach Aufgabe 2 ist diese Summe

$$=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Frage 43. Welche Vereinfachung gestattet der vorige Ausdruck?

Antwort. Unter der Voraussetzung, daß α, β, γ drei ganze positive Zahlen darstellen, ist:

$$\binom{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}\binom{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!};$$

denn nach Formel № 5 haben wir:

$$\binom{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma-1)\,\ldots\ldots\,(\alpha+\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\ldots\,\gamma}$$

$$\binom{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\,\ldots\ldots\,(\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\ldots\,\beta},\text{ daher}$$

$$\binom{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}\binom{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma-1)\ldots\ldots(\alpha+\beta+1)}{\gamma!}$$
$$\cdot\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\ldots\ldots(\alpha+1)}{\beta!}\cdot\frac{\alpha!}{\alpha!}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

Nun ist:

$$\binom{n}{1} = n = \frac{n!}{1!(n-1)!}; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{1 \cdot 2(n-2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!};$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot (n-3)!}{1 \cdot 2 \cdot 3(n-3)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \text{ usw.}$$

Ferner wird nach obiger Formel für $\alpha = n-2$; $\beta = 1$ und $\gamma = 1$:

$$\binom{n}{1}\binom{n-1}{1} = \frac{n!}{(n-2)!\,1!\,1!}$$

Ebenso wird für $\alpha = n-5$; $\beta = 3$ und $\gamma = 2$:

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{3} = \frac{n!}{(n-5)!\,3!\,2!}$$

Für $\alpha = n-5$; $\beta = 2$, $\gamma = 3$ folgt:

$$\binom{n}{3}\binom{n\quad 3}{2} = \frac{n!}{(n-5)!\,3!\,2!}$$

Für $\alpha = 3$; $\beta = n-5$, $\gamma = 2$ folgt:

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{n-5} = \frac{n!}{3!\,(n-5)!\,2!}$$

usw. Hiedurch erhalten wir:

$$(a+b+.)^n = a^n + b^n + c^n + \frac{n!}{(n-1)!\,1!}\left\{a^{n-1}b + a^{n-1}c + \cdots + bc^{n-1}\right\}$$

$$+ \frac{n!}{(n-2)!\,2!}\left\{a^{n-2}b^2 + a^{n-2}c^2 + \cdots + b^2c^{n-2}\right\}$$

$$+ \frac{n!}{(n-3)!\,3!}\left\{a^{n-3}b^3 + a^{n-3}c^3 + \cdots + b^3c^{n-3}\right\} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{n!}{(n-2)!\,1!\,1!}\left\{a^{n-2}bc + ab^{n-2}c + abc^{n-2}\right\} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{n!}{(n-5)!\,3!\,2!}\left\{a^{n-5}b^3c^2 + a^{n-5}b^2c^3 + \cdots\cdots + a^2b^3c^{n-5}\right\} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Frage 44. In welcher allgemeinen Form läßt sich jedes einzelne Glied dieser Formel darstellen?

Erkl. 28. Wählen wir von den drei Exponenten α, β, γ, deren Summe $= n$ sein muß, $\alpha = n$, so wird $\beta = 0$ und $\gamma = 0$. Nach nebenstehender Regel muß dann ein Glied von der Form $\frac{n!\, a\;\; b^0 c^0}{n!\,0!\,0!}$ auftreten. Wenn wir die Voraussetzung machen, daß $0! = 1$ sein soll, so geht unser genanntes Glied, da $b^0 = 1$ und $c^0 = 1$ ist, über in $\frac{n!\, a^n}{n!} = a^n$.

Ebenso wird ein anderes Glied unter der Form $\frac{n!\, a^\alpha b^{n-\alpha} c^0}{\alpha!\,(n-\alpha)!\,0!}$ auftreten. Dieses reduziert sich jetzt auf $\frac{n!\, a^\alpha b^{n-\alpha}}{\alpha!\,(n-\alpha)!}$.

In dieser Weise werden schließlich alle Glieder des Ausdruckes der vorigen Frage gewonnen werden.

Antwort. Jedes Glied unserer Formel besteht aus einem Produkt von Potenzen der Größen a, b, c dergestalt, daß jeder Exponent eine der Zahlen 0, 1, 2 bis n sein darf, die Exponentensumme aber immer $= n$ wird. Heißen wir diese Exponenten α, β, γ, so lautet unser Produkt $a^\alpha \,.\, b^\beta \,.\, c^\gamma$, wobei

$$\alpha + \beta + \gamma = n.$$

Ferner muß dann jedem Produkt noch als Koeffizient diejenige Zahl vorgesetzt werden, welche sich ergibt, wenn man $n!$ durch das Produkt der Fakultäten der einzelnen Exponenten dividiert; also heißt genannter Koeffizient mit der gewählten Bezeichnung $\frac{n!}{\alpha!\;\beta!\;\gamma!}$. Nun erscheint jedes Glied der Formel unter der Form:

$$\frac{n!}{\alpha!\;\beta!\;\gamma!} a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma,$$

wobei $\alpha + \beta + \gamma = n$ ist und wir erhalten im ganzen:

$$(a+b+c)^n = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\;\beta!\;\gamma!} a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma,$$

wobei

$\alpha = 0, 1, 2, \ldots n$
$\beta = 0, 1, 2, \ldots n$
$\gamma = 0, 1, 2, \ldots n$ und $\alpha + \beta + \gamma = n$.

Frage 45. Wie läßt sich nun aus der für $(a+b+c)^n$ gefundenen Formel die n^{te} Potenz P^n des Polynoms

$$P = a + b + c + d + e + \cdots$$

herstellen?

Antwort. Wie wir aus $(a+b)^n$ den Ausdruck für $(a+b+c)^n$ gewonnen haben, so läßt sich jetzt auch von $(a+b+c)^n$ zu

$$(a+b+c+d)^n = \left\{(a+b+c)+d\right\}^n$$

übergehen; dabei folgt:

$$(a+b+c+d) = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$$

wobei

$$\alpha = 0, 1, 2, \ldots . . n$$
$$\beta = 0, 1, 2, \ldots . . n$$
$$\gamma = 0, 1, 2, \ldots . . n$$
$$\delta = 0, 1, 2, \ldots . . n \text{ und } \alpha + \beta + \gamma + \delta = n$$

sein muß. Durch Verallgemeinerung erhalten wir jetzt:

$$P^n = (a + b + c + d + e \ldots)^n = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon! \ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon \ldots \ldots \text{№}14$$

Erkl. 29. Diese Formel für den allgemeinen polynomischen Lehrsatz fand Leibniz; er teilte sie brieflich Johannes Bernoulli mit 1695. Mai $\frac{6}{16}$

mit den Bedingungen:

$$\alpha = 0, 1, 2, \ldots n$$
$$\beta = 0, 1, 2, \ldots n$$
$$\gamma = 0, 1, 2, \ldots n$$
$$\delta = 0, 1, 2. \ldots n$$
$$\varepsilon = 0, 1, 2, \ldots n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\text{und } \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots = n.$$

---

3. 2te Entwicklung des polynomischen Lehrsatzes.

Frage 46. Wie läßt sich die Formel für den polynomischen Lehrsatz direkt aus den Begriffen des Polynoms und der Potenz herleiten?

Antwort. Wir knüpfen zunächst an einem konkreten Fall an und verlangen, es soll irgend ein Glied von $(a + b + c + d)^{10}$ gefunden werden. Nehmen wir statt

$$(a + b + c + d)^{10}$$

zuerst das Produkt

$$(a_1 + b_1 + c_1 + d_1)(a_2 + b_2 + c_2 + d_2) \ldots . . (a_{10} + b_{10} + c_{10} + d_{10}),$$

so können wir die 10 Faktoren f so zusammenfassen, daß wir aus ihnen 4 auswählen, dann aus den 6 übrigbleibenden 3, aus den 3 übrigbleibenden noch 2 und zuletzt den 10ten Faktor hinzufügen. Z. B. können wir unser Produkt nehmen:

$$= (f_1 f_2 f_7 f_8) \cdot (f_3 f_9 f_{10}) \cdot (f_4 f_6) \cdot f_5.$$

In $f_1 f_2 f_7 f_8 = (a_1 + b_1 + c_1 + d_1)(a_2 + b_2 + c_2 + d_2)(a_7 + b_7 + c_7 + d_7)$
$(a_8 + b_8 + c_8 + d_8)$

erscheint sicher das Glied $a_1\,a_2\,a_7\,a_8$.

In $f_8 f_9 f_{10} = (a_8 + b_8 + c_8 + d_8)(a_9 + b_9 + c_9 + d_9)(a_{10} + b_{10} + c_{10} + d_{10})$

erhalten wir das Glied $b_8\,b_9\,b_{10}$. In

$f_4 f_6 = (a_4 + b_4 + c_4 + d_4)(a_6 + b_6 + c_6 + d_6)$

erhalten wir das Glied $c_4\,c_6$ und der letzte Faktor $a_5 + b_5 + c_5 + d_5$ enthält d_5. Daraus folgt, daß das große Produkt P das Glied

$$a_1\,a_2\,a_7\,a_8\,b_3\,b_9\,b_{10}\,c_4\,c_6\,d_5$$

enthalten muß.

Wählen wir nun $a_1 = a_2 = \ldots = a_{10}$; $b_1 = b_2 = \ldots = b_{10}$, $c_1 = c_2 = \ldots = c_{10}$ und endlich $d_1 = d_2 = \ldots = d_{10}$, so folgt, daß in $P^{1)} = (a + b + c + d)^{10}$ das mit einem Zahlenfaktor versehene Glied $a^4\,b^3\,c^2\,d$ enthalten sein muß mit der Summe der Exponenten $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Nun fragt es sich noch, wie der beizufügende Zahlenfaktor lautet. Wir erinnern uns, daß a^4 aus 4 Faktoren a, z. B. $a_1\,a_2\,a_7\,a_8$, welche wir aus den 10 ausgewählt haben, erhalten worden ist. Hienach wird a^4 so oft vorkommen, als wir aus den 10 Elementen $a_1 \ldots a_{10}$ Kombinationen von je 4 Elementen bilden können; deren Zahl beträgt nach Frage 26 $\binom{10}{4}$; also erhalten wir $\binom{10}{4} a^4$. Zu jedem Faktor a^4 tritt dann noch b^3, hervorgegangen aus 3 Faktoren b, — in unserem Beispiel sind es b_8, b_9, b_{10} aus der Reihe b_3, b_4, b_5, b_6, b_9, b_{10} gewesen. — Diese Reihe aber ermöglicht die Bildung von $\binom{6}{3}$ Kombinationen der III. Klasse, woraus folgt, daß $\binom{6}{3} b^3$ zu jedem a^4 treten und wir nun $\binom{10}{4}\binom{6}{3} a^4\,b^3$ bekommen. Zu jedem $a^4\,b^3$ kommt nun weiter noch c^2, entstanden aus 2 Faktoren c,

Anmerkung: Nachdem wir

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \cdots = a_{10} \\ b_1 &= b_2 = \cdots = b_{10} \\ c_1 &= c_2 = \cdots = c_{10} \text{ und} \\ d_1 &= d_2 = \cdots = d_{10} \end{aligned}$$

gesetzt haben, bezeichnen wir den gemeinschaftlichen Wert der ersten Größen mit a, den der zweiten mit b usw.

z. B. aus c_4, c_6 aus der Reihe c_4, c_5, c_6. Diese Reihe liefert zur zweiten Klasse die $\binom{3}{2}$ Kombinationen — in unserem Beispiele $c_4 c_5$, $c_4 c_6$ und $c_5 c_6$. Dadurch bekommen wir nun $\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2} a^4 b^3 c^2$. Schließlich liefert das noch übrige 10^{te} Glied den Faktor d. Somit muß in $(a+b+c+d)^{10}$ das Glied

$$\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} a^4 b^3 c^2 d$$

vorkommen.

Die nämliche Schlußreihe auf $(a+b+c+d+e)^{19}$ angewandt, wird zu einem Glie l

$$\binom{19}{4}\binom{19-4}{3}\binom{19-7}{5}\binom{19-12}{2}\binom{19-14}{5} a^4 b^3 c^5 d^2 e^5$$

führen.

Hat man allgemein

$$P^n = (a+b+c+d+e)^n,$$

so liefert die eben angewandte Methode den Satz, daß in der Formel für P^n ein mit einem Zahlenfaktor versehenes Glied $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ vorkommen muß, der Art, daß die Summe des Exponenten, d. h. $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots=n$ ist. Ferner gelangt man zu dem genannten Zahlenfaktor, wenn man folgende Zahlen multipliziert: die Zahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse α, von $n-\alpha$ Elementen zur Klasse β, von $n-\alpha-\beta$ Elementen zur Klasse γ usw. D. h. unser obiger Zahlenfaktor heißt:

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}\cdots\cdots$$

Da derselbe $=\dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$ ist, so folgt für unser genanntes Glied die Form:

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ .$$

Erkl. 80. Es ist:

$$\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\cdot\frac{6.5.4}{1.2\ 3}\cdot\frac{3.2}{1.2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{10!}{4!\,3!\,2!\,1!}$$

Ebenso ist:

$$\binom{19}{4}\binom{19-4}{3}\binom{19-7}{5}\binom{19-12}{2}\binom{19-14}{5}$$

$$=\frac{19.18.17.16}{1.2.3.4}\cdot\frac{15.14.13}{1.2.3}\cdot\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{7.6}{1.2}\cdot\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}=\frac{19!}{4!\,3!\,5!\,2!\,5!}$$

In gleicher Weise wird:

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}\binom{n-\alpha-\beta-\gamma}{\delta}\cdots$$

mit $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots.=n$ einfacher

$$=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\ldots}$$

und wir erhalten wieder:

$$P^n = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

wobei $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$. D. h., es folgt der **Polynomische Lehrsatz:**

Um alle Glieder der Entwicklung von $(a+b+c+d+\cdots)^n$ zu erhalten, hat man zuerst alle denkbaren Produkte von Potenzen der Größen $a, b, c, d\ldots$ dergestalt zu bilden, daß jeder Exponent eine der Zahlen 0, 1, 2 ... bis n sein darf, die Exponentensumme aber gleich n wird und darauf jedem Produkt als Koeffizient diejenige Zahl vorzusetzen, welche sich ergibt, wenn man $n!$ durch das Produkt der Fakultäten der einzelnen Exponenten dividiert. Dabei muß $0! = 1$ gerechnet werden.

Frage 47. Welche Formeln erhält man hienach für P^2, P^3, P^4 usw., wenn $P = a + b + c + d + \cdots$ gesetzt wird?

Erkl. 31. Für $n = 2$ wird der Zahlenfaktor $\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$ entweder $= \frac{2!}{2!} = 1$ oder $= \frac{2!}{1!\,1!} = 2$.

Für $n = 3$ erhalten wir:

$$\frac{3!}{3!} = 1;\ \frac{3!}{2!\,1!} = 3 \text{ und } \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6.$$

Für $n = 4$:

$$\frac{4!}{4!} = 1;\ \frac{4!}{3!\,1!} = 4;\ \frac{4!}{2!\,2!} = 6;\ \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12;$$

$$\frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!} = 24 \text{ usw.}$$

Antwort. Erheben wir das Polynom $P = a + b + c + \cdots$ auf die zweite Potenz, so können wir $n = 2$ nur in $2 + 0 + 0 + 0 + \cdots$ und in $1 + 1 + 0 + 0 + \cdots$ zerlegen; von den Exponenten $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ in

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} a^\beta b^\beta c^\gamma \ldots$$

hat daher einer den Wert 2, während alle anderen $= 0$ sind; oder einer der Exponenten hat den Wert 1, ein anderer ebenso, während alle anderen $= 0$ sind. Daraus folgt, daß die Glieder in der Entwicklung von P^2 nur zweierlei Art sind, nämlich solche, welche a^2, b^2, $c^2\ldots$ usw. lauten und deren Summe wir von früher Σa^2 heißen wollen, und solche welche $2ab$, $2bc$, $2cd\ldots$ heißen; ihre Summe sei wieder durch $2\Sigma ab$ ausgedrückt; daraus folgt jetzt wie in № 10:

$$P^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab.$$

Erheben wir P auf die Potenz $n=3$, so haben wir $3=3+0+0+\cdots$ oder $=2+1+0+0+\cdots\cdots$ $=1+1+1+0+0+\cdots$ Von α, β, $\gamma\ldots$. gibt es also die 3 Fälle, daß eine dieser Größen $=3$ und die andern $=0$; oder eine $=2$, eine andere $=1$ und die übrigen $=0$; oder drei je $=1$ und die anderen alle $=0$; die Glieder in der Entwicklung haben hienach entweder die Form a^3, $b^3\ldots$ oder a^2b, $b^2c\ldots$ oder abc, $bcd\ldots$, die zugehörigen Zahlenfaktoren sind $=1$, 3 und 6, deshalb können wir abgekürzt schreiben wie in № 11:

$$P^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc$$

Erheben wir P auf die IV. Potenz, so haben wir $4=4+0+0+\cdots$ $=3+1+0+\cdots=2+2+0+0+\cdots$ $=2+1+1+\cdots=1+1+1+1+0+\cdots$ Daraus folgt wie in № 12:

$$P^4=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc+24\Sigma abcd.$$

Aufgabe 101. Wie lautet die entsprechende Formel für

$$(a+b+c+\cdots)^5?$$

Auflösung. Wie erhalten wie in № 13:

$$P^6=\Sigma a^5+5\Sigma a^4b+10\Sigma a^3b^2+20\Sigma a^3bc+30\Sigma a^2b^2c+60\Sigma a^2bcd$$
$$+120\Sigma abcde.$$

Aufgabe 102. Ebenso für

$$(a+b+c+\cdots)^6.$$

Auflösung. Es wird:

$$P=\Sigma a^6+6\Sigma a^5b+15\Sigma a^4b^2+30\Sigma a^4bc+20\Sigma a^3b^3+60\Sigma a^3b^2c$$
$$+120\Sigma a^3bcd+90\Sigma a^2b^2c^2+180\Sigma a^2b^2cd+360\Sigma a^2bcde+720\Sigma abcdef.$$

Die Lösung dieser beiden Aufgaben möge der Leser selbst versuchen.

Frage 48. Wie läßt sich die weitere Ausführung dieser Entwicklungen erleichtern?

Antwort. Man benutzt die folgende Tabelle; sie liefert — soweit als sie reicht — in jeder Vertikalreihe die Glieder von

$(a+b+c+\ldots)^n$, welche die zu oberst stehende Potenz von a zum Faktor haben, wenn diese Potenz von a mit den darunter stehenden Produkten verbunden wird; es muß dann nur noch der richtige Zahlenkoeffizient beigefügt werden.

Tafel der Kombinationen in den Potenzen eines Polynoms.

a^n	a^{n-1}	a^{n-2}	a^{n-3}	a^{n-4}	a^{n-5}	a^{n-6}	a^{n-7}	a^{n-8}	a^{n-9}	a^{n-10}
	b									
	c	b^2								
	d	bc	b^3							
	e	bd c^2	b^2c	b^4						
	f	be cd	b^2d bc^2	b^3c	b^5					
	g	bf ce d^2	b^2e bcd c^3	b^3d b^2c^2	b^4c	b^6				
	h	bg cf de	b^2f bce bd^2 c^2d	b^3e b^2cd bc^3	b^4d b^3c^2	b^5c	b^7			
	i	bh cg df e^2	b^2g bcf bde c^2e cd^2	b^3f b^2ce b^2d^2 bc^2d c^4	b^4e b^3cd b^2c^3	b^5d b^4c^2	b^6c	b^8		
	k	bi ch dg ef	b^2h bcg bdf be^2 c^2f cde d^3	b^3g b^2cf b^2de bc^2e bcd^2 c^3d	b^4f b^3ce b^3d^2 b^2c^3d bc^4	b^5e b^4cd b^3c^3	b^6d b^5c^2	b^7c	b^9	

Aufgabe 103. Wie lautet die vollständige Entwicklung von
$$(a+b+c+d+e)^2?$$

Antwort. Da hier $n=2$ ist, so können in der Tabelle nur die drei ersten Vertikalreihen zur Anwendung und da nach Frage 47 in $P^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma a$ nur die Koeffizienten 1 beziehungsweise 2 auftreten, erhalten wir unter Weglassung der Glieder mit f, g usw.:

$$(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + b^2 + 2bc + 2bd$$
$$+ c^2 + 2be + 2cd + 2ce + d^2 + 2de + e^2.$$

Aufgabe 104. Ebenso von
$$(a+b+c+d)^3?$$

Antwort. Hier ist $n=3$; es müssen demnach die vier ersten Vertikalreihen benutzt werden. Nach Formel № 11 ist
$$P^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 6\Sigma abc;$$
die Koeffizienten sind also hier beziehungsweise 1, 3 und 6. Mit Weglassung der Größen $e, f \ldots$ enthaltenden Glieder liefert die Tabelle:

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + (3a^2b + 3a^2c + 3a^2d) + (3ab^2 + 6abc + 6abd$$
$$+ 3ac^2 + 6acd + 3ad^2)$$
$$+ (b^3 + 3b^2c + 3b^2d + 3bc^2 + 6bcd + c^3 + 3bd^2$$
$$+ 3c^2d + 3cd^2 + d^3).$$

Aufgabe 105. Ebenso von
$$(a+b+c)^4?$$

Antwort. Da nach Formel № 12 hier
$$P^4 = \Sigma a^4 + 4\Sigma a^3 b + 6\Sigma a^2 b^2$$
$$+ 12\Sigma a^2 bc$$
ist, gibt die Tabelle:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + (4a^3b + 4a^3c) + (6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2)$$
$$+ (4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3)$$
$$+ b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 12bc^3 + c^4.$$

Anmerkung: Weitere Aufgaben siehe am Schluß dieses Abschnittes.

Frage 49. Wieviele Glieder enthält hienach die Entwicklung von $(a+b+c+d+\cdot\cdot)^n$, wenn die Zahl der Größen a, b, c, d usw. $=g$ ist?

Antwort. In $(a+b)^n$ ist die Gliederzahl $=n+1$; nach Frage 42 ist in $(a+b+c)^n$ die Gliederzahl

$$=\frac{(n+2)(n+1)}{1\cdot 2}=\binom{n+2}{2}$$

Schreiten wir nun zur Feststellung der Gliederzahl von $(a+b+c+d)^n$, so können wir setzen:

$$(a+b+c+d)^n=\left\{(a+b+c)+d\right\}^n$$

Nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, gibt dies:

$$(a+b+c+d)^n=(a+b+c)^n+\binom{n}{1}(a+b+c)^{n-1}d+\binom{n}{2}(a+b+c)^{n-2}d^2$$
$$+\cdots\cdot+\binom{n}{n-1}(a+b+c)d^{n-1}+d^n.$$

Nun ist die Gliederzahl von

$$(a+b+c)^n=\binom{n+2}{2},$$

die von

$$(a+b+c)^{n-1}=\binom{n+1}{2};$$

jene von $(a+b+c)^{n-2}=\binom{n}{2}$ usw.

Hienach haben wir als Zahl der Glieder von $(a+b+c+d)^n$ offenbar:

$$\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}+\cdots\cdot+\binom{2}{2}=\binom{n+3}{3}$$

(siehe Aufgabe 4)

In gleicher Weise folgt:

$$(a+b+c+d+e)^n=\left\{(a+b+c+d)+e\right\}^n=(a+b+c+d)^n$$
$$+\binom{n}{1}(a+b+c+d)e+\cdots+e^n.$$

Die Gliederzahl ist hier:

$$=\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}+\cdots+\binom{3}{3}=\binom{n+4}{4}\text{ usw}$$

Durch Verallgemeinerung erhalten wir für die Zahl der Glieder der $n^{\underline{\underline{ten}}}$ Potenz des aus g Größen zusammengesetzten Polynoms $a+b+c+\cdots\cdots$, den Wert $=\binom{n+g-1}{g-1}$. Z. B. haben wir in $(a+b+c+d+e)^{15}$ die Zahl

$g=5$

$n=15$, somit ist die Gliederzahl

$$=\binom{15+4}{4}=\binom{19}{4}=3876.$$

Frage 50. Welche Entwicklung liefert der polynomische Lehrsatz für $(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^n$?

Antwort. Es geht

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdot$$

in $a+b+c+d+e+\cdots\cdot$ über, wenn wir setzen:

$$a=a_0;\ b=a_1x;\ c=a_2x^2;\ d=a_3x^3\cdots$$

Oben haben wir gefunden, daß jedes Glied der Entwicklung von $(a+b+c+\cdots)^n$ dargestellt werden werden kann in der Form

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma\ldots,$$

wobei α, β, γ, $\delta\ldots$ der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots n$ derart entnommen sind, daß $\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n$ ist. Durch Einsetzung der vorhin genannten Werte finden wir, für ein Glied der Entwicklung von

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)^n$$

die Form:

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\ .}\,a_0{}^\alpha(a_1x)^\beta\,.\,(a_2x^2)^\gamma\,.\,(a_3x^3)^\delta\ldots.$$

$$=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\ldots}\,a_0{}^\alpha\,.\,a_1{}^\beta\,a_2{}^\gamma\,a_3{}^\delta\ldots.\,x^{\beta+2\gamma+3\delta+\cdots\cdot}$$

Führen wir für den Exponenten von x, d. h. für die Summe

$$\alpha\,.\,0+\beta\,.\,1+\gamma\,.\,2+\delta\,.\,3+\cdots\cdot$$

die Bezeichnung k ein, also

$$k=\alpha\,.\,0+\beta\,.\,1+\gamma\,.\,2+\gamma\,.\,3+\cdots,$$

so gewinnt das Glied die Form:

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots}\,a_0^\alpha\,.\,a_1^\beta\,.\,a_2^\gamma\,\ldots\,.\,x^k$$

Nun erhebt sich die Frage, wie man alle Glieder, welche die gleiche Potenz x^k enthalten, erhalten könne. Bekanntlich sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . . Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2 . . ., und

$$k = \alpha\,.\,0 + \beta\,.\,1 + \gamma\,.\,2 + \delta\,.\,3 + \varepsilon\,.\,4 + \zeta\,.\,5 + \cdots$$

stellt eine Summe von n Gliedern vor. Wählen wir also einen bestimmten Wert von k, so können wir jetzt umgekehrt die Zahl k in n ungleiche oder gleiche Summanden zerlegen aus den Zahlen 0, 1, 2, 3 . . .; dies ist aber auf verschiedene Arten möglich; jede solche Gruppierung liefert uns dann ein Glied mit x^k, das wir dann mit dem zugehörigen Zahlenkoeffizienten $\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots}$ versehen müssen; alle diese Glieder zusammengefaßt geben dann die Gruppe der Glieder mit x^k usw.

Frage 51. Wie lauten in der Entwicklung von

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^n$$

die Glieder, welche x^5 enthalten?

Antwort. Wir können setzen:

$$k = 5 = \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n-1} + 5; \text{ dies gibt } \alpha = n-1,\ \zeta = 1;$$

$$= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n-2} + 1 + 4; \text{ dies gibt } \alpha = n-2,\ \beta = 1,\ \varepsilon = 1;$$

$$= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n-2} + 2 + 3; \text{ dies gibt } \alpha = n-2,\ \gamma = 1,\ \delta = 1;$$

$$= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n-3} + \underbrace{1 + 1}_{2} + 3; \text{ dies gibt } \alpha = n-3,\ \beta = 2,\ \delta = 1;$$

$$= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n-3} + 1 + \underbrace{2 + 2}_{2}; \text{ dies gibt } \alpha = n-3,\ \beta = 1,\ \gamma = 2;$$

$$= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n-4} + \underbrace{1 + 1 + 1}_{3} + 2; \text{ dies gibt } \alpha = n-4,\ \beta = 3,\ \gamma = 1;$$

$$= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n-5} + \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1}_{5}; \text{ dies gibt } \alpha = n-5;\ \beta = 5.$$

Ohne Zahlenkoeffizienten heißen hienach die ge uchten Glieder:

$$a_0^{n-1} a_5 x^5;\ a_0^{n-2} a_1 a_4 x^5;\ a_0^{n-2} a_2 a_3 x^5;\ a_0^{n-3} a_1^2 a_3 x^5;\ a_0^{n-3} a_1 a_2^2 x_3;$$

$$a_0^{n-4} a_1^3 a_2 x^5 \text{ und } a_0^{n-5} a_1^5 x^5.$$

Frage 52. Ebenso für x^7?

Auflösung. Hier ist $k = 7$; wir erhalten hier die Zerlegungen:

$k = 7 = n - 1$ Nullen $+ 7$; gibt $a_0^{n-1} . a_7$
$= n - 2$ Nullen $+ 1 + 6$; gibt $a_0^{n-2} . a_1 . a_6$
$= n - 2$ Nullen $+ 2 + 5$; gibt $a_0^{n-2} . a_2 . a_5$
$= n - 2$ Nullen $+ 3 + 4$; gibt $a_0^{n-2} . a_3 . a_4$
$= n - 3$ Nullen $+ 2 . 1 + 5$; gibt $a_0^{n-3} . a_1^2 . a_5$
$= n - 3$ Nullen $+ 1 + 2 . 3$; gibt $a_0^{n-3} . a_1 . a_3^2$
$= n - 3$ Nullen $+ 2 \cdot 2 + 3$; gibt $a_0^{n-3} . a_2^2 . a_3$
$= n - 4$ Nullen $+ 3 \cdot 1 + 4$; gibt $a_0^{n-4} . a_1^3 . a_4$
$= n - 4$ Nullen $+ 2 \cdot 1 + 2 + 3$; gibt $a_0^{n-4} a_1^2 . a_2 . a_3$
$= n - 4$ Nullen $+ 1 + 3 \cdot 2$; gibt $a_0^{n-4} . a_1 . a_2^3$
$= n - 5$ Nullen $+ 4 \cdot 1 + 3$; gibt $a_0^{n-5} . a_1^4 . a_3$
$= n - 5$ Nullen $+ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2$; gibt $a_0^{n-5} . a_1^3 . a_2^2$
$= n - 6$ Nullen $+ 5 \cdot 1 + 2$; gibt $a_0^{n-6} . a_1^5 . a_2$
$= 7 \cdot 1 \cdots\cdots\cdots\cdots$; gibt a_1^7,

hier ist jedesmal noch der Faktor x^7 beizufügen.

Frage 53. Wie heißen hienach in der Entwicklung von

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^n$$

die Glieder, welche x^0, x^1, x^2, $x^3 \cdots$ enthalten?

Antwort. Wenn das in Frage 50 angegebene Verfahren für $k = 0, 1, 2, 3 \cdots$ durchgeführt wird, erhalten wir ohne die Zahlenkoeffizienten folgende Glieder:

$a_0^n x^0$, $a_0^{n-1} a_1 x$,

$a_0^{n-1} a_2 x^2$, $a_0^{n-2} a_1^2 x^2$

$a_0^{n-1} a_3 x^3$, $a_0^{n-2} a_1 a_2 x^3$, $a_0^{n-3} a_1^3 x^3$

$a_0^{n-1} a_4 x^4$, $a_0^{n-2} a_1 a_3 x^4$, $a_0^{n-2} a_2^2 x^4$, $a_0^{u-3} a_1^2 a_2 x^4$,

$a_0^{n-4} a_1^4 x^4$; usw.

Wir geben hierfür folgende tabellarische Zusammenstellung, welche nach dem Vorausgeh nden ohne weitere Erklärung verständlich sein dürfte.

k	a_0^n	a_0^{n-1}	a_0^{n-2}	a_0^{n-3}	a_0^{u-4}	a_0^{n-5}	a_0^{n-6}	a_0^{n-7}	a_0^{n-8}	a_0^{n-9}	a_0^{n-10}
1		a_1									
2		a_2	a_1^2								
3		a_3	$a_1 a_2$	a_1^3							
4		a_4	$a_1 a_3$ a_2^2	$a_1^2 a_2$	a_1^4						
5		a_5	$a_1 a_4$ $a_2 a_3$	$a_1^2 a_3$ $a_1 a_2^2$	$a_1^3 a_2$	a_1^5					
6		a_6	$a_1 a_5$ $a_2 a_4$ a_3^2	$a_1^2 a_4$ $a_1 a_2 a_3$ a_2^3	$a_1^3 a_3$ $a_1^2 a_2^2$	$a_1^4 a_2$	a_1^6				
7		a_7	$a_1 a_6$ $a_2 a_5$ $a_3 a_4$	$a_1^2 a_5$ $a_1 a_2 a_4$ $a_1 a_3^2$ $a_2^2 a_3$	$a_1^3 a_4$ $a_1^2 a_2 a_3$ $a_1 a_2^3$	$a_1^4 a_3$ $a_1^3 a_2^2$	$a_1^5 a_2$	a_1^7			
8		a_8	$a_1 a_7$ $a_2 a_6$ $a_3 a_5$ a_4^2	$a_1^2 a_6$ $a_1 a_2 a_5$ $a_1 a_3 a_4$ $a_2^2 a_4$ $a_2 a_3^2$	$a_1^3 a_5$ $a_1^2 a_2 a_4$ $a_1^2 a_3^2$ $a_1 a_2^2 a_3$ a_2^4	$a_1^4 a_4$ $a_1^3 a_2 a_3$ $a_1^2 a_2^3$	$a_1^5 a_3$ $a_1^4 a_2^2$	$a_1^6 a_2$	a_1^8		
9		a_9	$a_1 a_8$ $a_2 a_7$ $a_3 a_6$ $a_4 a_5$	$a_1^2 a_7$ $a_1 a_2 a_6$ $a_1 a_3 a_5$ $a_1 a_4^2$ $a_2^2 a_5$ $a_2 a_3 a_4$ a_3^3	$a_1^3 a_6$ $a_1^2 a_2 a_5$ $a_1^2 a_3 a_4$ $a_1 a_2^2 a_4$ $a_1 a_2 a_3^2$ $a_2^3 a_3$	$a_1^4 a_5$ $a_1^3 a_2 a_4$ $a_1^3 a_3^2$ $a_1^2 a_2^2 a_3$ $a_1 a_4^2$	$a_1^5 a_4$ $a_1^4 a_2 a_3$ $a_1^3 a_2^3$	$a_1^6 a^3$ $a_1^5 a_2^2$	$a_1^7 a_2$	a_1^9	
10		a_{10}	$a_1 a_9$	$a_1^2 a_8$	$a_1^3 a_7$	$a_1^4 a_6$	$a_1^5 a_5$	$a_1^6 a_4$	$a_1^7 a_3$	$a_1^8 a_2$	a_1^{10}
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .		

Heft 1500	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (**Algebra**, Planimetrie, Stereometrie, **ebenen** und **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthilfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

— Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas. —

Heft 5

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsa

Frage 54. Wie gestaltet sich nun die Entwicklung von

$$P^n = (a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots)^n?$$

Antwort. Durch Beifügung der entsprechenden Zahlenkoeffizienten bekommen wir aus der vorigen Frage 53:

$$
\begin{aligned}
P^n = {} & a_0^n \\
& + \frac{n!}{(n-1)!} a_0^{n-1} a_1 x \\
& + \left\{ \frac{n!}{(n-1)!} a_0^{n-1} a_2 + \frac{n!}{(n-2)!\,2!} a_0^{n-2} a_1^2 \right\} x^2 \\
& + \left\{ \frac{n!}{(n-1)!} a_0^{n-1} a_3 + \frac{n!}{(n-2)!} a_0^{n-2} a_1 a_2 + \frac{n!}{(n-3)!\,3!} a_0^{n-3} a_1^3 \right\} x^3 \\
& + \left\{ \frac{n!}{(n-1)!} a_0^{n-1} a_4 + \frac{n!}{(n-2)!} a_0^{n-2} a_1 a_3 + \frac{n!}{(n-2)!\,2!} a_0^{n-2} a_2^2 \right. \\
& \qquad \left. + \frac{n!}{(n-3)!\,2!} a_0^{n-3} a_1^2 a_2 + \frac{n!}{(n-4)!\,4!} a_0^{n-4} a_1^4 \right\} x^4 \\
& + \left\{ \frac{n!}{(n-1)!} a_0^{n-1} a_5 + \frac{n!}{(n-2)!} a_0^{n-2} a_1 a_4 + \frac{n!}{(n-2)!} a_0^{n-2} a_2 a_3 \right. \\
& \qquad + \frac{n!}{(n-3)!\,2!} a_0^{n-3} a_1^2 a_3 + \frac{n!}{(n-3)!\,2!} a_0^{n-3} a_1 a_2^2 \\
& \qquad \left. + \frac{n!}{(n-4)!\,3!} a_0^{n-4} a_1^3 a_2 + \frac{n!}{(n-5)!\,5!} a_0^{n-5} a_1^5 \right\} x^5 \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Aufgabe 106. Entwickle

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^2.$$

Auflösung. Da hier $n = 2$ zu nehmen ist, so erhalten wir mit der vorigen Formel:

$$
\begin{aligned}
P^2 = {} & a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_2 + a_1^2) x^2 + (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) x^3 + (2a_0 a_4 \\
& + 2a_1 a_3 + a_2^2) x^4 + (2a_0 a_5 + 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3) x^5 + (2a_0 a_6 + 2a_1 a_5 \\
& + 2a_2 a_4 + a_3^2) x^6 + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Aufgabe 107. Entwickle ebenso
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^3$.

Auflösung. $n = 3$ ergibt:

$$P^3 = a_0^3 + 3a_0^2 a_1 x + \{3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2\} x^2 + \{3a_0^2 a_3 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^3\} x^3$$
$$+ \{3a_0^2 a_4 + 6a_0 a_1 a_3 + 3a_0 a_2^2 + 3a_1^2 a_2\} x^4$$
$$+ \{3a_0^2 a_5 + 6a_0 a_1 a_4 + 6a_0 a_2 a_3 + 3a_1^2 a_3 + 3a_1 a_2^2\} x^5$$
$$+ \{3a_0^2 a_6 + 6a_0 a_1 a_5 + 6a_0 a_2 a_4 + 3a_0 a_3^2 + 3a_1^2 a_4 + 6a_1 a_2 a_3 + a_2^3\} x^6$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

Aufgabe 108. Ebenso
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^4$.

Auflösung.

$$P^4 = a_0^4 + 4a_0^3 a_1 x + \{4a_0^3 a_2 + 6a_0^2 a_1^2\} x^2 + \{4a_0^3 a^3 + 12a_0^2 a_1 a_2$$
$$+ 4a_0 a_1^3\} x^3$$
$$+ \{4a_0^3 a_4 + 12a_0^2 a_1 a_3 + 6a_0^2 a_2^2 + 12a_0 a_1^2 a_2 + a_1^4\} x^4$$
$$+ \{4a_0^3 a_5 + 12a_0^2 a_1 a_4 + 12a_0^2 a_2 a_3 + 12a_0 a_1^2 a_3 + 12a_0 a_1 a_2^2$$
$$+ 4a_1^3 a_2\} x^5 + \cdots$$

Aufgabe 109. Ebenso
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^5$.

Auflösung.

$$P^5 = a_0^5 + 5a_0^4 a_1 x + \{5a_0^4 a_2 + 10a_0^3 a_1^2\} x^2$$
$$+ \{5a_0^4 a_3 + 20a_0^3 a_1 a_2 + 10a_0^2 a_1^3\} x^3$$
$$+ \{5a_0^4 a_4 + 20a_0^3 a_1 a_3 + 10a_0^3 a_2^2 + 30a_0^2 a_1^2 a_2 + 5a_0 a_1^4\} x^4$$
$$+ \{5a_0^4 a_5 + 20a_0^3 a_1 a_4 + 20a_0^3 a_2 a_3 + 30a_0^2 a_1^2 a_3 + 30a_0^2 a_1 a_2^2$$
$$+ 20a_0 a_1^3 a_2 + a_1^5\} x_5$$
$$+ \{5a_0^4 a_6 + 20a_0^3 a_1 a_5 + 20a_0^3 a_2 a_4 + 10a_0^3 a_3^2 + 30a_0^2 a_1^2 a_4$$
$$+ 60a_0^2 a_1 a_2 a_3 + 10a_0^2 a_2^3 + 20a_0 a_1^3 a_3 + 30a_0 a_1^2 a_2^2$$
$$+ 5a_1^4 a_2\} x^6 + \cdots$$

---

4. Aufgaben über den polynomischen Lehrsatz samt Lösungen.

Aufgabe 110. Wie groß ist die Zahl der Glieder von $(a+b+c)^n$ für $n = 2, 3, 4 \ldots$?

Antwort. Nach Frage 49 wird die Zahl der Glieder ausgedrückt durch $\binom{n+2}{2}$; dies gibt

für	$n = 2,$	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Gliederzahl	$= 6$	10	15	21	28	36	45	55	66.

Aufgabe 111. Ebenso für $(a+b+c+d)^n$.

Antwort. Hier ist die Gliederzahl $= \binom{n+3}{3}$; dies ergibt:

für	$n = 2,$	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Gliederzahl	$= 10$	20	35	56	84	120	165	220	286.

Aufgabe 112. Ebenso für $(a+b+c+d+e)^n$.

Antwort. Gliederzahl $= \binom{n+4}{4}$; also:

für	$n = 2,$	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Gliederzahl	$= 15$	35	70	126	210	330	495	715	1001.

Aufgabe 113. Wieviel Glieder hat $(a+b+c+d+e+f)^5$?

Antwort. $\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5} = 252.$

Aufgabe 114. Wie groß muß in der Entwicklung von $(a+b+c)^8$ in jedem Glied die Summe der Exponenten sein und wie heißen die Zahlenkoeffizienten von a^4bc^3 und von $a^3b^2c^3$?

Antwort. Nach Frage 44 kann hier mit $n = 8$ jedes Glied in der Form $\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,a^\alpha b^\beta c^\gamma$ dargestellt werden; dabei müssen α, β, γ aus der Reihe der Zahlen $0, 1, 2 \ldots 8$ so gewählt werden, daß $\alpha+\beta+\gamma=8$ ist. In a^4bc^3 haben wir $\alpha = 4$, $\beta = 1$ und $\gamma = 3$; deshalb heißt der zugehörige Zahlenkoeffizient $\frac{8!}{4!\,1!\,3!} = 280$; der zu $a^3b^2c^3$ hat den Wert $\frac{8!}{3!\,2!\,3!} = 560.$

Aufgabe 115. Wie groß muß in der Entwicklung von $(a+b+c+d)^{10}$ in jedem Glied die Summe der Exponenten sein und wie heißen die Zahlenkoeffizienten von $a^3 b^4 c^2 d$, von $ab^3 c^3 d^3$ und von $b^5 d^5$?

Antwort. Hier ist $n = 10$; jedes Glied ist darstellbar unter der Form

$$\frac{10!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$$

α, β, γ, δ sind hierbei Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2 \ldots$ und $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ muß $= 10$ sein. Das Glied $a^3 b^4 c^2 d$ bekommt den Koeffizienten

$$\frac{10!}{3!\,4!\,2!\,1!} = 12600,$$

$ab^3 c^3 d^3$ erhält $\dfrac{10!}{1!\,3!\,3!\,3!} = 16800$

und $b^5 d^5$ ist mit dem Faktor

$\dfrac{10!}{5!\,5!} = 252$ versehen. Siehe Frage 45.

Aufgabe 116. Entwickle
$(a+b-c)^2$!

Auflösung. Man entwickelt nach Frage 37 $(a+b+c_1)^2$ und setzt dann noch $c_1 = -c$; dies gibt

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc.$$

Aufgabe 117. Entwickle
$(2r-4s-5t)^2$!

Auflösung. Wir entwickeln $(a+b+c)^2$ und setzen dann noch $a = 2r$, $b = -4s$ und $t = -5t$; dies liefert

$$(2r-4s-5t)^2 = 4r^2 + 16s^2 + 25t^2 - 16rs - 20rt + 40st.$$

Aufgabe 118. Ebenso $(a-b+c)^3$.

Auflösung. Nach Frage 38 ist

$$(a+b_1+c)^3 = a^3 + b_1{}^3 + c^3 + 3a^2b_1 + 3a^2c + 3ab_1{}^2 + 3b_1{}^2c + 3ac^2 + 3b_1c^2 + 6ab_1c.$$

Setzen wir nun $b_1 = -b$, so folgt:

$$(a-b+c)^3 = a^3 - b^3 + c^3 - 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 - 6abc.$$

Aufgabe 119. Ebenso

$$\left(\frac{1}{2}r - \frac{2}{3}s - \frac{3}{5}t\right)^3.$$

Auflösung. Setzen wir in der Entwicklung von $(a + b + c)^3$ ein: $a = \frac{r}{2}$, $b = -\frac{2}{3}s$ und $c = -\frac{3}{5}t$, so erhalten wir:

$$\left(\frac{r}{2} - \frac{2}{3}s - \frac{3}{5}t\right)^3 = \frac{r^3}{8} - \frac{8s^3}{27} - \frac{27t^3}{125} - \frac{r^2 s}{2} - \frac{9r^2 t}{20} + \frac{2rs^2}{3} - \frac{4s^2 t}{5}$$
$$+ \frac{27rt^2}{50} - \frac{18st^2}{25} + \frac{6rst}{5}.$$

Aufgabe 120. Ebenso

$$(x + 2y - 3z)^4.$$

Auflösung. Nach Frage 39 ist:

$$(a + b + c)^4 = \Sigma a^4 + 4\Sigma a^3 b + 6\Sigma a^2 b^2 + 12\Sigma a^2 bc$$

oder

$$= a^4 + b^4 + c^4$$
$$+ 4\left\{a^3 b + a^3 c + ab^3 + b^3 c + ac^3 + bc^3\right\}$$
$$+ 6\left\{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2\right\}$$
$$+ 12\left\{a^2 bc + ab^2 c + abc^2\right\}$$

Setzt man hier $a = x$; $b = 2y$ und $c = -3z$, so erhält man:

$$(x + 2y - 3z)^4 = x^4 + 16y^4 + 81z^4 + 8x^3 y - 12x^3 z + 32xy^3 - 96y^3 z$$
$$- 108xz^3 - 216yz^3 + 24x^2 y^2 + 54x^2 z^2 + 216y^2 z^2$$
$$- 72x^2 yz - 144xy^2 z + 216xyz^2.$$

Aufgabe 121. Ebenso

$$(1 + x + 2y)^5.$$

Auflösung. Nach Frage 39 ist:

$$(a + b + c)^5 = \Sigma a^5 + 5\Sigma a^4 b + 10\Sigma a^3 b^2 + 20\Sigma a^3 bc + 30\Sigma a^2 b^2 c,$$

oder ausführlich:

$$= a^5 + b^5 + c^5 + 5\left\{a^4 b + a^4 c + ab^4 + b^4 c + ac^4 + bc^4\right\}$$
$$+ 10\left\{a^3 b^2 + a^3 c^2 + a^2 b^3 + b^3 c^2 + a^2 c^3 + b^2 c^3\right\}$$
$$+ 20\left\{a^3 bc + ab^3 c + abc^3\right\}$$
$$+ 30\left\{a^2 b^2 c + a^2 bc^2 + ab^2 c^2\right\};$$

für $a = 1$, $b = x$ und $c = 2y$ folgt:

$$\begin{aligned}(1 + x + 2y)^5 = 1 &+ x^5 + 32y^5 + 5x + 10y + 5x^4 + 10x^4y + 80y^4 + 80xy^4 \\ &10x^2 + 40y^2 + 10x^3 + 40x^3y^2 + 80y^3 + 80x^2y^3 + 40xy \\ &40x^3y + 160xy^3 + 60x^2y + 120xy^2 + 120x^2y^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 122. Entwickle

$$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^2.$$

Auflösung. Wir setzen in Aufgabe 106 $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$ und $a_4 = 5$; alle übrigen $a = 0$; dann folgt:

$$\begin{aligned}(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^2 &= 1 + 4x + (6 + 4)x^2 + (8 + 12)x^3 \\ &+ (10 + 16 + 9)x^4 + (20 + 24)x^5 \\ &+ (30 + 16)x^6 + 40x^7 + 25x^8 \\ &= 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 \\ &+ 44x^5 + 46x^6 + 40x^7 + 25x^8.\end{aligned}$$

Aufgabe 123. Entwickle

$$(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^3.$$

Auflösung. In Aufgabe 107 haben wir zu setzen: $a_0 = 1$, $a_1 = -1$; $a_2 = +1$; $a_3 = -1$ und $a_4 = +1$; alle folgenden $a = 0$; dies gibt:

$$\begin{aligned}(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^3 = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 18x^5 + 19x^6 - 18x^7 \\ + 15x^8 - 10x^9 + 6x^{10} - 3x^{11} + x^{12}.\end{aligned}$$

Aufgabe 124. Entwickle

$$\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3\right)^4.$$

Auflösung. Setze in Aufgabe 108 $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, alle folgenden $a = 0$; dann folgt:

$$\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3\right)^4 = 1 + 2x + \frac{17}{6}x^2 + \frac{7}{2}x^3 + \frac{155}{48}x^4 + \frac{31}{12}x^5 + \cdots$$

Aufgabe 125. Entwickle

$$(2 - 5x - 7x^2 + x^3 + 3x^4)^5.$$

Auflösung. Setze in Aufgabe 109 $a_0 = 2$; $a_1 = -5$, $a_2 = -7$; $a_3 = +1$, $a_4 = +3$; dies gibt:

$$\begin{aligned}(2 - 5x - 7x^2 + x^3 + 3x^4)^5 = 32 &- 400x + 1440x^2 + 680x - 11390x^4 \\ &+ 1955x^5 + 47025x^6 + 5425x^7 \\ &- 111845x^8 - 71145x^9 + 103073x^{10} \\ &+ 119495x^{11} - 36185x^{12} - 86055x^{13} \\ &- 8165x^{14} + 31441x^{15} + 9465x^{16} \\ &- 5715x^{17} - 2565x^{18} + 405x^{19} + 243x^{20}.\end{aligned}$$

Nach Heis.

---

5. Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 126. Wieviel Glieder hat die Entwicklung von $(a-b+c)^{12}$?

Aufgabe 127. Ebenso diejenige von $(r-s+t+u)^{15}$?

Aufgabe 128. Ebenso diejenige von $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{5}{4}z+\frac{7}{9}u-\frac{2}{11}v\right)^4$?

Aufgabe 129. Ebenso diejenige von $(3-4x+5y^2-6z^3+7u^4-8v^5)^3$?

Aufgabe 130. Berechne den Zahlenkoeffizient von $a^3 b^7 c^2$ in der Entwicklung von $(a+b+c)^{12}$.

Aufgabe 131. Ebenso von $b^3 c^3 d^3$ in $(a+b+c+d)^9$.

Aufgabe 132. Entwickle $(a-b-c)^2$.

Aufgabe 133. Ebenso $(\frac{1}{2}u-4v+2w)^2$.

Aufgabe 133a. Ebenso $(2\sqrt{a}-3\sqrt{b}+5\sqrt{c})^2$.

Aufgabe 134. Ebenso $(a-b-c)^3$.

Aufgabe 135. Ebenso $\left(\frac{3}{4}u^2-\frac{4}{9}v^3-\frac{8}{27}w\right)^3$.

Aufgabe 136. Ebenso $(3u-2v+5w)^4$.

Aufgabe 137. Ebenso $(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})^4$.

Aufgabe 138. Ebenso $\left(\sqrt[4]{c^3}+\sqrt[4]{c^2d}+\sqrt[4]{cd^2}+\sqrt[4]{d^3}\right)^4$

Aufgabe 139. Ebenso $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}+\frac{c}{4}\right)^5$

Aufgabe 140. Ebenso $(a+b+c+d+e+f)^2$.

Aufgabe 141. Ebenso $(a+b+c+d+e)^4$.

Aufgabe 142. Ebenso $(a+b+c+d)^5$.

Aufgabe 143. Ebenso $(a+b+c)^6$.

Aufgabe 144. Ebenso $(1+\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6$.

Aufgabe 145. Ebenso $\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4-\frac{1}{6}x^5\right)^2$.

Aufgabe 146. Ebenso $(2+3x+4x^2+5x^3)^3$.

Aufgabe 147. Ebenso $(1-x+x^2+x^3-x^4+x^5)^4$.

Aufgabe 148. Ebenso $\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4\right)^5$.

Aufgabe 149. Ebenso $(4+3x+2x^2+x^3)^6$.

III. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

I. Arithmetische Reihen erster Ordnung.

Frage 55. Was ist unter einer Reihe oder Progression von Zahlen zu verstehen?

Antwort. Eine Reihe wird von Zahlen gebildet, welche nach einem bestimmten Gesetz aufeinander folgen. Die Zahlen heißen die Glieder der Reihe und die Zahl, welche die Stellung eines Gliedes in der Reihe angibt, heißt der Stellenzeiger oder der Index des Gliedes. Eine Reihe heißt steigend, wenn die Glieder fortwährend an Größe zunehmen; im andern Fall, wenn die Glieder abnehmen, heißt die Reihe eine fallende.

Frage 56. Nach welchen Gesetzen sind die Reihen

1) 1, 3, 5, 7, 9 ...

2) 1, 4, 16, 64, 256 ...

3) 1, 5, 21, 85, 341 ...

4) 15, 7, -1, -9, 17 ...

5) 9, $4^1/_2$, $2^1/_4$, $1^1/_8$, $^9/_{16}$, $^9/_{32}$ ..

gebildet?

Antwort. Wenn wir die Glieder einer Reihe mit y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, ... y_n bezeichnen, so daß y_1 das erste Glied, y_2 das zweite, allgemein y_n das n^{te} Glied vorstellt, so ist in der ersten Reihe $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 5$, $y_4 = 7$ usw. Wir erkennen das Gesetz, daß jedes Glied um 2 größer ist als das unmittelbar vorausgehende. In der zweiten Reihe haben wir zu setzen $y_1 = 4$, $y_2 = 16$, $y_3 = 64$, $y_4 = 256$; das Bildungsgesetz lautet hier: jedes Glied ist das Vierfache des vorausgehenden. Die dritte Reihe liefert $y_1 = 1$, $y_2 = 5$, $y_3 = 21$, $y_4 = 85$; hier ist $y_2 = 4y_1 + 1$; $y_3 = 4y_2 + 1$; $y_4 = 4y_3 + 1$ usw. Das zugehörige Gesetz heißt demnach: man erhält aus einem Glied das folgende, indem man zum

Vierfachen des genannten Gliedes noch 1 addiert. Die Gesetze der beiden fallenden Reihen IV und V wird der Leser selbst leicht finden.

Aufgabe 150. Suche das Bildungsgesetz der Reihen

I. 1, 4, 9, 16, 64 ...

II. $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+2b}, \frac{1}{a+3b}, \ldots$

III. 8, 7, 5, 2 ...

IV. $a^5, \quad -a^4 b, \quad a^3 b^2, \quad -a^2 b^3, \ldots$

V. $\frac{1}{x}, \frac{8}{x^2}, \frac{27}{x^3}, \frac{64}{x^4}, \ldots$

und füge noch weitere Glieder hinzu.

Auflösung. Dem Leser überlassen.

Frage 57. Welche Reihen heißen arithmetische Reihen I. Ordnung?

Erkl. 32. Der Leser findet eine ausführliche Behandlung der arithmetischen Reihen I. O. in Kleyer, Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

Hier werden diese Reihen nur in dem Umfang wiederholt, wie es der Zusammenhang mit den folgenden Reihen notwendig macht; alles Übrige möge der Leser in dem genannten Werk nachlesen.

Antwort. Eine arithmetische Reihe I. Ordnung ist eine geordnete Folge von Zahlen, in welcher jede Zahl vermindert um die vorhergehende, die gleiche Differenz ergibt. So ist 4, 9, 14, 19, 24 eine arithmetische Reihe I. Ordnung mit der Differenz 5. Ihr Anfangsglied ist 4, ihr Endglied 24 und die Anzahl der Glieder $= 5$. Ebenso ist 12, 10, 8, 6, 4, 2 eine aus 6 Gliedern bestehende arithmetische Reihe, in welcher $10 - 12 = -2$, $8 - 10 = -2$ usw., die konstante Differenz beträgt also hier -2.

Frage 58. Welche Bedingungen müssen die Zahlen y_1, y_2, y_3, y_4 usw. erfüllen, wenn sie die Glieder einer arithmetischen Reihe I. Ordnung sein sollen?

Erkl. 33. Das Zeichen $\triangle$ stellt also eine Zahl vor; nehmen wir z. B. die Reihe $y_1 = 5$, $y_2 = 9$, $y_3 = 13$ usw., so ist $\triangle y = 9 - 5 = 13 - 9 = 4$.

Für die Reihe 1, 10, 19, 28 ... ist $\triangle = 9$, denn $10 - 1 = 19 - 10 = 28 - 19 \ldots = 9$.

Antwort. Es muß

$$y_2 - y_1 = y_3 - y_2 = y_4 - y_3$$

u. s. w. sein. Diese konstante Differenz zwischen einem Glied und dem ihm unmittelbar vorangehenden soll mit $\triangle y$ berechnet werden. Dann ist also:

$$y_2 - y_1 = \triangle y, \; y_3 - y_2 = \triangle y,$$
$$y_4 - y_3 = \triangle y \text{ usw.}$$

Wir können dies in folgender Art zusammenstellen:

Hauptreihe	Differenzenreihe
$y_1 \dots\dots$	
	$y_2 - y_1 = \triangle y$
$y_2 \dots\dots$	
	$y_3 - y_2 = \triangle y$
$y_3 \dots\dots$	
	$y_4 - y_3 = \triangle y$
$y_4 \dots\dots$	
	$\dots\dots\dots\dots$

Frage 59. Von einer arithmetischen Reihe I. Ordnung sei y_1 das Anfangsglied und $\triangle y$ sei die konstante Differenz. Welche Werte müssen dann die folgenden Glieder y_2, y_3 ... usw. haben und wie groß muß das $n^{\underline{te}}$ Glied y_n sein?

Antwort. Aus dem Vorigen folgt direkt:

$$y_2 = y_1 + \triangle y$$
$$y_3 = y_2 + \triangle y = y_1 + 2\triangle y$$
$$y_4 = y_3 + \triangle y = y_1 + 3\triangle y$$
$$y_5 = y_4 + \triangle y = y_1 + 4\triangle y \text{ usw.}$$

Hienach ist es möglich, das $n^{\underline{te}}$ Glied der Reihe sofort anzuschreiben:

$$y_n = y_1 + (n-1)\triangle y \dots \text{№ } 15.$$

Z. B.:

$$y_{10} = y_1 + (10-1)\triangle y = y_1 + 9\triangle y$$
$$y_{57} = y_1 + (57-1)\triangle y = y_1 + 56\triangle y.$$

Aufgabe 151. Wie heißt das $20^{\underline{te}}$ Glied der Reihe mit dem Anfangsglied $y_1 = 2$ und der konstanten Differenz $\triangle y = -0{,}2$?

Auflösung. Aus $y_1 = 2$ und $\triangle y = -0{,}2$ folgt:

$$y_{20} = y_1 + 19\triangle y = 2 + 19(-0{,}2)$$
$$= -1{,}8.$$

Frage 60. Welchen Ausdruck erhält man für das $n^{\underline{te}}$ Glied y_n nach dem Ordnen nach Potenzen von n und welche Folgerung gestattet derselbe?

Antwort. Obige Formel liefert uns: $y_n = \triangle y \cdot n + (y_1 - \triangle y)$.

Setzen wir

$$\triangle y = a \text{ und } y_1 - \triangle y = b,$$

so folgt:

$$y_n = an + b. \dots \text{№ } 16.$$

Für die Reihe 4, 7, 10, 13 usw. ist $y_1 = 4$, $\triangle y = 3$, also $a = 3$ und $b = +1$; dies gibt für diese Reihe:

$$y_n = 3n + 1.$$

Für $n = 5$ liefert sie $y_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$
„ $n = 7$ „ „ $y_6 = 3 \cdot 7 + 1 = 22$
„ $n = 11$ „ „ $y_{11} = 3 \cdot 11 + 1 = 34$ usw.

Die beiden Größen a und b spielen hienach bei der Berechnung der Glieder der Reihe die Rolle von zwei konstanten Zahlen.

Wir können nun die Sache umdrehen und die Frage aufwerfen, wie sich die Werte von a und b aus zwei Gliedern der Reihe bestimmen lassen. Zur Berechnung von zwei unbekannten Größen genügen bekanntlich zwei Gleichungen, daher lassen sich a und b aus zwei Gliedern der Reihe finden; daraus folgt der **Satz:** Die arithmetische Reihe ist durch zwei Glieder bestimmt.

Aufgabe 152. Von einer arithmetischen Reihe I. Ordnung sind die Glieder y_u und y_v mit den Stellenzenzeigern u und v bekannt. Die Reihe zu finden.

Auflösung. Aus der obigen Gleichung $y_n = an + b$ leiten wir für $n = u$ und $n = v$ die beiden Gleichungen ab:

$$ua + b = y_u$$
$$va + b = y_v$$

und erhalten daraus:

$$a = \frac{y_v - y_u}{v - u} \text{ und } b = \frac{y_u v - y_v \cdot u}{v - u}$$

Dann wird mit $n = 1$: $y_1 = a . 1 + b$
„ $n = 2$: $y_2 = a . 2 + b$
usw.

Aufgabe 153. Von einer arithmetischen Reihe I. Ordnung sei das fünfte Glied $= 10$ und das neunte Glied $= 22$; wie heißt die Reihe?

Auflösung. Wir nehmen $u = 5$, $y_5 = 10$; $v = 9$ und $y_9 = 22$; daraus folgt: $a = \frac{22 - 10}{9 - 5} = 3$

$$b = \frac{10 \cdot 9 - 22 \cdot 5}{9 - 5} = -5 \text{ und}$$

$$y_n = 3n - 5.$$

Somit ist $y_1 = 3 - 5 = -2$
$y_2 = 3 \cdot 2 - 5 = +1$ usw.

Frage 61. Welche Folgerungen läßt sich aus diesen Betrachtungen ableiten?

Erkl. 34. In der analytischen Geometrie ist das geometrische Bild der Gleichung $y = ax + b$ eine gerade Linie; der Abszisse x entspricht die Ordinate y und beide Coordinaten x und y bestimmen einen bestimmten Punkt P der Geraden. — Nimmt man auf der Abszissenachse die Werte $x = 1, 2, 3$ usw., so geben diese die zugehörigen Ordinaten y_1, y_2, y_3 usw., und beides zusammen auf der Geraden die Punktreihe $P_1, P_2, P_3 \ldots$ Diese in gleichen Abständen folgenden Punkte der Geraden bilden die geometrische Darstellung der arithmetischen Reihe I. Ordnung.

Antwort. Aus der Gleichung $y_n = an + b$ erhalten wir die Glieder der arithmetischen Reihe, indem wir für n der Reihe nach ganze Zahlen 1, 2, 3, usw. einsetzen. Wählen wir statt dieser Bezeichnung die gewöhnliche, indem wir y_n durch y und n durch x ersetzen, wodurch wir $y = ax + b$ erhalten, so haben wir den **Satz:** Setzen wir in einer Funktion ersten Grades $ax + b$ für x der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 ... ein, so bilden die hiedurch erhaltenen Werte y_1, y_2, y_3 usw. eine arithmetische Reihe I. Ordnung.

Frage 62. Wie erhält man einen Ausdruck für die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe I. Ordnung, also für:

$$s = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} + y_n?$$

Antwort. Es ist $y_2 = y_1 + \triangle y$, $y_3 = y_2 + 2\triangle y$, $y_4 = y_1 + 3\triangle y$ usw. Gerade so dürfen wir auch schreiben: $y_{n-1} = y_n - \triangle y$, $y_{n-2} = y_n - 2\triangle y$, $y_{n-3} = y_n - 3\triangle y$ usw. Hiemit wird:

$$s = y_1 + (y_1 + \triangle y) + (y_1 + 2\triangle y) + \cdots + (y_n - 2\triangle y) + (y_n - \triangle y) + y_n$$

$$\text{und } s = y_n + (y_n - \triangle y) + (y_n - 2\triangle y) + \cdots + (y_1 + 2\triangle y) + (y_1 + \triangle y) + y_1$$

$$\text{Durch Addition folgt: } 2s = (y_1 + y_n) + (y_1 + y_n) + (y_1 + y_n) + \cdots + (y_1 + y_n) + (y_1 + y_n) + (y_1 + y_n)$$

oder $2s = (y_1 + y_n) \cdot n$, daher ist:

$$s = \frac{(y_1 + y_n) n}{2} = \frac{y_1 + y_n}{2} \cdot n \ldots \text{№} 17$$

Erkl. 35. Soll die Reihe

2, 1,8, 1,6, 1,4 ... — 1,6, — 1,8

summiert werden, so ist $y_1 = 2$, $y_n = -1{,}8$ und $n = 20$; daher:

$$s = 2 + 1{,}8 + 1{,}6 + \ldots + (-1{,}4) + (-1{,}6) + (-1{,}8)$$
$$s = (-1{,}8) + (-1{,}6) + (-1{,}4) + \ldots + 1{,}6 + 1{,}8 + 2$$
$$2s = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 + \ldots + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2$$

$2s = 0{,}2 \cdot 20$ und daher $s = 2$.

Daraus folgt der **Satz:** Die Summe von einer Anzahl aufeinander folgenden Glieder einer arithmetischen Reihe I. Ordnung ist gleich dem arithmetischen Mittel aus dem Anfangsglied und dem Schlußglied, multipliziert mit der Anzahl der Glieder.

Frage 63. In welche andere Formen läßt sich der Ausdruck für die vorige Summe bringen?

Antwort. Da $y_n = y_1 + (n-1)\triangle y$ ist, so liefert dieser Wert in s eingesetzt:

$$s = \left\{2y_1 + (n-1)\triangle y\right\}\frac{n}{2}$$

oder $s = ny_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \triangle y$

Da aber $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ ist, kann auch gesetzt werden:

$$s = n_1 y + \binom{n}{2}\triangle y \ldots \text{№} 18$$

Weiter können wir auch schreiben:

$$s = {}^1\!/_2 \triangle y n^2 + (y_1 - {}^1\!/_2 \triangle y)n;$$

für $\alpha = {}^1\!/_2 \triangle y$ und $\beta = y_1 - {}^1\!/_2 \triangle y$ geht dieser Ausdruck über in

$$s = \alpha n^2 + \beta n \ldots. \text{№} 19.$$

Die erste Formel liefert den Wert von s aus den 3 Größen y_1, $\triangle y$ und n. Wählen wir wieder das Beispiel 2, 1,8 ... — 1,6, — 1,8 mit $y_1 = 2$, $\triangle y = -0{,}2$ und $n = 20$, so gibt die erste Formel:

$$s = \left\{4 + 19(-0{,}2)\right\}\frac{20}{2} = 2.$$

Ferner wird $\alpha = -0{,}1$ und $\beta = 2 + 0{,}1 = 2{,}1$ und $n = 20$; daher: $s = -0{,}1 \cdot n^2 + 2{,}1 n$
$= -40 + 42 = 2.$

Für $n = 30$ würde als Summe s_{30} der ersten 30 Glieder obiger Reihe folgen:

$$s = -0{,}1 \cdot 30^2 + 2{,}1 \cdot 30 = -90 + 63 = -27 \text{ usw.}$$

Wir leiten daraus ab den **Satz:** Die Summe 3 der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe I. Ordnung ist eine Funktion zweiten Grades der Anzahl n der Glieder. Die in dieser Funktion $\alpha n^2 + \beta n$ auftretenden konstanten Größen α und β

lassen sich durch zwei Werte von s samt den zugehörigen Stellenzahlen bestimmen, wodurch dann die ganze Reihe bekannt ist.

Aufgabe 154. Von einer arithmetischen Reihe I. Ordnung sei die Summe s_5 der fünf ersten Glieder $= 50$, die Summe $s_8 =$ der acht ersten Glieder $= 116$. Wie heißt die Reihe?

Auflösung. Aus $s = \alpha n^2 + \beta n$ erhalten wir für $n = 5$:

$$25\alpha + 5\beta = 50$$

und für $n = 8$:

$$64\alpha + 8\beta = 160.$$

Daraus folgt: $\alpha = \frac{3}{2}$ und $\beta = \frac{5}{2}$.

Somit ist:

$$s_1 = \alpha \,.\, 1^2 + \beta \,.\, 1 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

$$s_2 = \alpha \,.\, 2^2 + \beta \,.\, 2 = 6 + 5 = 11$$

$$s_3 = \alpha \,.\, 3^2 + \beta \,.\, 3 = \frac{27}{2} + \frac{15}{2} = 21$$

. . . .

$$y_1 = s_1 = 4;$$

$$y_2 = s_2 - s_1 = 4 - 11 = 7$$

$$y_3 = s_3 - s_2 = 21 - 11 = 10 \text{ usw.}$$

Die Reihe lautet hienach: 4, 7, 10 . . .

Frage 64. Welche Größen kommen nach diesen Betrachtungen bei einer arithmetischen Reihe I. Ordnung hauptsächlich in Betracht?

Antwort. Es handelt sich in erster Linie um die 5 Größen y_1, $\triangle y$, y_n, n und s. Sind von ihnen 3 bekannt, so können die beiden fehlenden berechnet werden. Da aus 5 Größen drei auf $\binom{5}{3} = 10$ verschiedene Arten ausgewählt werden können und von den beiden fehlenden Größen die eine oder die andere gesucht werden kann, so entstehen 20 verschiedene Aufgaben, deren Lösung der Leser in dem oben genannten Werk der Enzyklopädie findet. Siehe Erkl. 32.

2. Arithmetische Reihen zweiter Ordnung.

Frage 65. Was ist unter einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung zu verstehen?

Antwort. Wir gehen aus von den Quadratzahlen: 1, 4, 9, 16, 25 usw. und bilden zunächst die Differenzen zwischen je einer Zahl und der vorangehenden, also $4-1=3$, $9-4=5$, $16-9=7$, $25-16=9$ u. s. f. Die erhaltenen Zahlen 3, 5, 7, 9 bilden eine neue Reihe; da diese Zahlen nicht gleich sind, ist die gegebene Reihe 1, 4, 9..... keine arithmetische Reihe I. Ordnung. Nun bilden wir von der Differenzenreihe 3, 5, 7, 9 wieder die Differenzen nach dem gleichen Verfahren:

$$5-3=2,\ 7-5=2,\ 9-2=7$$

usw. Auf diese Weise folgt die zweite Differenzenreihe 2, 2, 2, 2 usw., deren Glieder übereinstimmen; deshalb sagt man, daß die gegebene Reihe 1, 4, 9, 16... eine arithmetische Reihe II. Ordnung darstelle. Tabellarisch zusammengestellt, erhalten wir:

Hauptreihe	I. Differenzenreihe	II. Differenzenreihe
1		
4	$4-1=3$	
9	$9-4=5$	$5-3=2$
16	$16-9=7$	$7-5=2$
25	$25-16=9$	$9-7=2$

Frage 66. Warum ist die Reihe 5, 7, 14, 26, 43 usw. eine arithmetische II. Ordnung?

Antwort. Aus der Hauptreihe 5, 7, 14, 26, 43 ..... folgt als I. Differenzenreihe:

$$7-5=2;\ 14-7=7;$$
$$26-14=12;\ 43-26=17.$$

Aus 2, 7, 12, 17 folgt als II. Differenzenreihe:

$$7-2=5;\ 12-7=5,\ 17-12=5.$$

Da ihre Glieder alle $=5$ sind, ist die Hauptreihe von der II. Ordnung.

Frage 67. Wie ist hienach eine arithmetische Reihe II. Ordnung zu definieren und wie läßt sich eine solche allgemein darstellen?

Erkl. 86. Hier bedeuten Δy_1, Δy_2, Δy_3 usw. eine Reihe von Zahlen, ebenso sind $\Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_2$, $\Delta^2 y_3$ .. die Zeichen für eine weitere Reihe von Zahlen. Diese Art der Bezeichnung mußte hier eingeführt werden, weil sie in der Differenzialberechnung allgemein üblich ist. Siehe Kleyer-Haas, Differenzialrechnung I, II, III.

Antwort. Bildet man aus einer gegebenen Reihe von Zahlen, der Hauptreihe, eine neue, indem man immer von einem Glied, das vorangehende subtrahiert, so erhält man die erste Differenzenreihe der Hauptreihe; wird aus der ersten Differenzenreihe in gleicher Weise wieder eine neue Differenzenreihe — die zweite — gebildet, so heißt die Hauptreihe II. Ordnung, wenn die zweite Differenzenreihe eine konstante ist.

Sind $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$ die Glieder der Hauptreihe, so bilden wir aus ihnen zuerst die Differenzen:

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1; \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2;$$
$$\Delta y_3 = y_4 - y_3 \text{ usw.}$$

Die erste Differenzenreihe heißt jetzt:

$$\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \Delta y_4 \ldots$$

Weiter bilden wir nun aus der letzten Reihe die zweiten Differenzen:

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$$
$$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3,$$

so daß jetzt die zweite Differenzenreihe lautet:

$$\Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2, \Delta^2 y_3, \Delta^2 y_4 \ldots.$$

Da die Hauptreihe von der zweiten Ordnung sein soll, so muß

$$\Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_2 = \Delta^2 y_3 = \Delta^2 y_4 \ldots$$

sein. Tabellarisch zusammengesetzt erhalten wir:

Hauptreihe	I. Differenzenreihe	II. Differenzenreihe
y_1		
y_2	$y_2 - y_1 = \Delta y_1$	$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1$
y_3	$y_3 - y_2 = \Delta y_2$	$\Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2$
y_4	$y_4 - y_3 = \Delta y_3$	$\Delta y_4 - \Delta y_3 = \Delta^2 y_3$
y_5	$y_5 - y_4 = \Delta y_4$	....
......	....	

Heft 1506	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (**Algebra**, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik**, **Mechanik**, **Graphostatik**, **Chemie**, **Geodäsie**, **Nautik**, mathemat. **Geographie**, **Astronomie**; des **Maschinen-**, Strassen-, Eisenbahn-, **Wasser-**, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: **darstell.** Geometrie, **Polar- u. Parallel-Perspective**, **Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthilfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. **A. Haas.**

Heft 6

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz is

Frage 68. Welche Folgerungen lassen sich aus der obigen Definition ziehen?

Antwort. Wir erhalten die **Sätze:** Eine Reihe II. Ordnung ist bestimmt 1) durch drei auf einanderfolgende Glieder der Hauptreihe oder 2) durch das erste Glied der Hauptreihe und den Anfangsgliedern der ersten und zweiten Differenzenreihen. Aus y_3, y_4 und y_5 erhalten wir z. B. $\triangle y_3$ und $\triangle y_4$, und aus diesen $\triangle^2 y_3 = \triangle^2 y_2 = \triangle^2 y_1$ usw. Diese Werte ermöglichen aber die Berechnung aller anderen Glieder.

Sind dagegen y_1, $\triangle y_1$ und $\triangle^2 y_1$ gegeben, so hat man wegen $\triangle^2 y_1 = \triangle^2 y_2 = \triangle^2 y_3$ usw. auch $\triangle y_2$, $\triangle y_3$, $\triangle y_4$; diese Werte ergeben dann y_2, y_3, y_4 der Hauptreihe.

Weiter erkennt man die Richtigkeit des **Satzes:** Eine solche Reihe II. Ordnung kann sowohl nach unten wie nach oben beliebig weit fortgesetzt werden. Dies soll nun an einigen Beispielen erläutert werden.

Aufgabe 155. Wie heißt die Reihe II. Ordnung, von welcher 3, 8, 16 drei auf einander folgende Glieder der Hauptreihe sind?

Auflösung. Wir setzen $y_1 = 3$, $y_2 = 8$, $y_3 = 16$ und bilden:

$$\triangle y_1 = y_2 - y_1 = 8 - 3 = 5$$
$$\triangle y_2 = y_3 - y_2 = 16 - 8 = 8.$$
$$\triangle^2 y_1 = \triangle y_2 - \triangle y_1 = 8 - 5 = 3.$$

Da die Reihe II. Ordnung sein soll, so müssen alle $\triangle^2 y = 3$ sein, daher ist $\triangle^2 y_2 = \triangle^2 y_3 = \triangle^2 y_4 = \cdots = 3$.

$$\triangle y_3 = \triangle y_2 + \triangle^2 y_2 = 8 + 3 = 11$$
$$\triangle y_4 = \triangle y_3 + \triangle^2 y_3 = 11 + 3 = 14$$
$$\triangle y_5 = \triangle y_4 + \triangle^2 y_4 = 14 + 3 = 17$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_4 = y_3 + \triangle y_3 = 16 + 11 = 27$$
$$y_5 = y_4 + \triangle y_4 = 27 + 14 = 41$$
$$y_6 = y_5 + \triangle y_5 = 41 + 17 = 58$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die gesuchte Reihe lautet hienach:

3, 8, 16, 27, 41, 58....

Aufgabe 156. Es soll die vorige Reihe nach oben fortgesetzt werden.

Auflösung. Unsere zweite Differenzenreihe heißt 3, 3, 3... und die erste 5, 8, 11, 14, 17...; diese ist eine arithmetische Reihe I. Ordnung mit der konstanten Differenz 3; somit heißt ihre Fortsetzung nach oben 5, 2, —1, —4, —7 usw. Da nun diese erste Differenzenreihe aus der Hauptreihe dadurch entsteht, daß man in dieser von einem Glied y_n das vorhergehende y_{n-1} abzieht, erhält man letzteres indem man vom ersten Glied die zugehörige Differenz abzieht, denn aus $y_n - y_{n-1} = \triangle y_{n-1}$ folgt $y_{n-1} = y_n - \triangle y_{n-1}$; z. B.:

$$y_3 = y_4 - \triangle y_3 = 27 - 11 = 16$$
$$y_2 = y_3 - \triangle y_2 = 16 - 8 = 8$$
$$y_1 = y_2 - \triangle y_1 = 8 - 5 = 3.$$

Setzen wir in dieser Weise das Verfahren fort, so folgt:

$$y_0 = y_1 - \triangle y_0 = 3 - 2 = 1$$
$$y_{-1} = y_0 - \triangle y_{-1} = 1 - (-1) = 2$$
$$y_{-2} = y_{-1} - \triangle y_{-2} = 2 - (-4) = 6$$
$$y_{-3} = y_{-2} - \triangle y_{-3} = 6 - (-7) = 13 \text{ usw.}$$

Zusammengefaßt haben wir nun:

n	Hauptreihe y	I. Differenzenreihe $\triangle y$	II. Differenzenreihe $\triangle^2 y$
....	....		
—3	.. $y_{-3} = 13$	$\triangle y_{-3} = -7$...	$\triangle^2 y_{-3} = 3$
—2	.. $y_{-2} = 6$	$\triangle y_{-2} = -4$...	$\triangle^2 y_{-2} = 3$
—1	.. $y_{-1} = 2$	$\triangle y_{-1} = -1$...	$\triangle^2 y_{-1} = 3$
. 0	.. $y_0 = 1$	$\triangle y_0 = +2$	$\triangle^2 y_0 = 3$
. 1	.. $y_1 = 3$	$\triangle y_1 = +5$ ...	$\triangle^2 y_1 = 3$
. 2	.. $y_2 = 8$	$\triangle y_2 = +8$ ...	$\triangle^2 y_2 = 3$
. 3	.. $y_3 = 16$	$\triangle y_3 = +11$...	$\triangle^2 y_3 = 3$
4	.. $y_4 = 27$	$\triangle y_4 = +14$...	$\triangle^2 y_4 = 3$
5	.. $y_5 = 41$	$\triangle y_5 = +17$	
6	.. $y_6 = 58$		
....	....		

Aufgabe 157. Wie lautet die Reihe II. Ordnug, deren Anfangsglied — 2, deren I. Differenzenreihe mit 8 und deren II. Differenzenreihe mit 7 beginnt?

Auflösung. Wir nehmen hier:
$y_1 = -2$, $\triangle y_1 = 8$ und $\triangle^2 y_1 = 7$
und folgern zunächst, daß auch

$$\triangle^2 y_2 = \triangle^2 y_3 = \triangle^2 y_4 \text{ usw.} = 7$$

sein muß. Dies liefert uns nun die I. Differenzenreihe $\triangle y_1 = 8$, $\triangle y_2 = 8 + 7 = 15$, $\triangle y_3 = 15 + 7 = 22$, $\triangle y_4 = 22 + 7 = 29$ usw.

Daraus folgt die Hauptreihe

$$y_2 = y_1 + \triangle y_1 = -2 + 8 = 6;$$
$$y_3 = y_2 + \triangle y_2 = 6 + 15 = 21;$$
$$y_4 = y_3 + \triangle y_3 = 21 + 22 = 43 \text{ usw.}$$

Die gesuchte Reihe heißt demnach:

$$-2,\ 6,\ 21,\ 43,\ 72,\ 108 \text{ usw.}$$

Wir schreiben dies in der Zusammenfassung:

$\boxed{-2}$	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$
6	15	7
21	22	7
43	29	7
72	36	
108		

und überlassen dem Leser die Fort setzung nach oben zu bilden.

Frage 69. Wenn wir in der vorigen Aufgabe von einer Reihe II. Ordnung das Anfangsglied y_1 der Hauptreihe und die Anfangsglieder $\triangle y_1$ und $\triangle^2 y_1$ der beiden Differenzenreihen gegeben sind, wie läßt sich das allgemeine Glied y_n daraus berechnen? n soll hiebei den bekannten Stellenzeiger des Gliedes bezeichnen.

Erkl. 37. Es ist

$$y_2 = y_1 + \triangle y_1$$
$$y_3 = y_2 + \triangle y_2 = y_1 + \triangle y_1 + \triangle y_2$$
$$y_4 = y_3 + \triangle y_3 = y_1 + \triangle y_1 + \triangle y_2 + \triangle y_3$$

usw. also:

$$y_n = y_{n-1} + \triangle y_{n-1}$$
$$= y_1 + (\triangle y_1 + \triangle y_2 + \cdots + \triangle y_{n-1}).$$

Antwort. Aus der Darstellung der Reihe II. Ordnung in Frage 67 leiten wir, da $\triangle^2 y_1 = \triangle^2 y_2 = \triangle^2 y_3 = \triangle^2 y_4$ usw., ab:

$$\triangle y_2 = \triangle y_1 + \triangle^2 y_1$$
$$\triangle y_3 = \triangle y_2 + \triangle^2 y_2 = \triangle y_1 + 2\triangle^2 y_1$$
$$\triangle y_4 = \triangle y_3 + \triangle^2 y_3 = \triangle y_1 + 3\triangle^2 y_1$$
$$\triangle y_5 = \triangle y_4 + \triangle^2 y_4 = \triangle y_1 + 4\triangle^2 y_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Zahlen $\triangle y_1$, $\triangle y_2$, $\triangle y_3$ usw. bilden eine Reihe I. Ordnung und nach Formel № 15 der Frage 59 erhalten wir allgemein:

$$\triangle y_{n-1} = \triangle y_1 + (n-2)\triangle^2 y_1 \ldots № 20$$

Hiemit bekommen wir nun für die Glieder der Hauptreihe:

$$y_1 = y_1 \text{ gegeben}$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1$$
$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = (y_1 + \Delta y_1) + (\Delta y_1 + \Delta^2 y_1) = y_1 + 2\Delta y_1 + \Delta^2 y_1$$
$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = (y_1 + 2\Delta y_1 + \Delta^2 y_1) + (\Delta y_1 + 2\Delta^2 y_1)$$
$$= y_1 + 3\Delta y_1 + 3\Delta^2 y_1$$
$$y_5 = y_4 + \Delta y_4 = (y_1 + 3\Delta y_1 + 3\Delta^2 y_1) + (\Delta y_1 + 3\Delta^2 y_1)$$
$$= y_1 + 4\Delta y_1 + 6\Delta^2 y_1$$
$$y_6 = y_5 + \Delta y_5 = (y_1 + 4\Delta y_1 + 6\Delta^2 y_1) + (\Delta y_1 + 4\Delta^2 y_1)$$
$$= y_1 + 5\Delta y_1 + 10\Delta^2 y_1$$

. . . .

$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$$
$$= y_1 + (\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \cdots + \Delta y_{n-1}). \quad \text{Siehe Erkl. 37.}$$

Bilden wir aber die in der Klammer stehende Summe, so bekommen wir, da es sich um die $n-1$ Summanden handelt, nach obiger Darstellung:

$$\Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_{n-1} = (n-1)\Delta y_1 + \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2)\}\Delta^2 y_1$$

Erkl. 38. Nach Aufgabe 2 ist die Summe der natürlichen Zahlen

$$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Daher ist

$$1+2+3+\cdots+(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$
$$= \binom{n-1}{2}.$$

Die Summe der natürlichen Zahlen $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 2$ ist aber nach Aufgabe 2:

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}.$$

Somit folgt für das allgemeine Glied:

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1 \quad \ldots \text{№ } 21.$$

Aufgabe 158. Wie heißt in der Reihe II. Ordnung der Aufgabe 157 das siebente Glied?

Auflösung. Wir haben dort $y_1 = -2$, $\Delta y_1 = 8$ und $\Delta^2 y_1 = 7$, daher wird das siebente Glied:

$$y_7 = y_1 + (7-1)\Delta y_1 + \binom{7-1}{2}\Delta^2 y_1$$
$$= -2 + 6 \cdot 8 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 7$$
$$= -2 + 48 + 105 = 151.$$

Aufgabe 159. Wie heißt in der Reihe II. Ordnung der Aufgabe 155 das 10te Glied?

Auflösung. Dort ist $y_1 = 3$, $\triangle y_1 = 5$, $\triangle^2 y_1 = 3$; somit wird:

$$y_{10} = y_1 + 9\triangle y_1 + \binom{9}{2}\triangle^2 y_1$$

$$= 3 + 9 \cdot 5 + 36 \cdot 3 = 156.$$

Frage 70. Wie lautet die Formel für das allgemeine Glied y_n, wenn der vorhin gefundene Ausdruck nach Potenzen von n geordnet wird?

Antwort. Wir schreiben:

$$y_n = y_1 + (n-1)\triangle y_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\triangle^2 y_1$$

$$= y_1 + (n-1)\triangle y_1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{2}\triangle^2 y_1 \quad \text{oder:}$$

$$y_n = \frac{1}{2}\triangle^2 y_1 \cdot n^2 + \left(\triangle y_1 - \frac{3}{2}\triangle^2 y_1\right) \cdot n + (y_1 - \triangle y_1 + \triangle^2 y_1)$$

Nehmen wir an, es seien die drei Größen y_1, $\triangle y_1$ und $\triangle^2 y_1$ gegeben, so können wir daraus die drei Hilfsgrößen bilden:

$$a = \frac{1}{2}\triangle^2 y_1; \; b = \triangle y_1 - \frac{3}{2}\triangle^2 y_1$$

und $c = y_1 - \triangle y_1 + \triangle^2 y_1$, dann wird $y_n = an^2 + bn + c \ldots$ № 22

Hiemit haben wir die verlangte zweite Formel für das allgemeine Glied y_n gefunden.

Wenden wir dieselbe an auf das Beispiel der obigen Aufgabe 158 mit $y_1 = -2$, $\triangle y_1 = 8$ u. $\triangle^2 y_1 = 7$, so wird zunächst:

$$a = \frac{7}{2}, \; b = 8 - \frac{3}{2} \cdot 7 \quad \text{und} \quad c = -2 - 8 + 7$$

$$= -2\frac{1}{2} \qquad\qquad = -3.$$

Daraus erhalten wir:

$$y_n = \frac{7}{2}n^2 - \frac{5}{2}n - 3.$$

Für $n = 7$ folgt daher $y_7 = \frac{7}{2} \cdot 7^2 - \frac{5}{2} \cdot 7 - 3 = 151.$

„ $n = 10$ „ $y_{10} = \frac{7}{2} \cdot 10^2 - \frac{5}{2} \cdot 10 - 3 = 322$

„ $n = 12$ „ $y_{12} = \frac{7}{2} \cdot 12^2 - \frac{5}{2} \cdot 12 - 3 = 471.$

Frage 71. Welche Folgerungen gestattet die Formel:

$$y_n = an^2 + bn + c?$$

Antwort. Beachten wir, daß in ein und derselben Reihe die drei Größen a, b, c für jedes Glied den gleichen Wert haben, so können wir jetzt die Sache umdrehen und versuchen die Werte der Größen a, b und c aus gegebenen Gliedern der Hauptreihe zu berechnen. Dabei finden wir den **Satz:** Wenn wir von der Hauptreihe drei Glieder mit ihren Stellenzahlen kennen, so lassen sich die drei Größen a, b, c daraus berechnen und diese letzteren liefern dann die Werte von y_1, y_2, y_3 usw., und damit die ganze Reihe.

Aufgabe 160. Von einer arithmetischen Reihe II. Ordnung kennt man die drei Glieder y_u, y_v und y_w, wobei u, v, w die Stellenzeiger bedeuten. Die Reihe zu berechnen.

Auflösung. Wir bilden zunächst auf der allgemeinen Formel

$$y_n = an^2 + bn + c$$

die drei Gleichungen:

$$u^2 a + ub + c = y_u$$
$$v^2 a + vb + c = y_v$$
$$w^2 a + wb + c = y_w$$

Daraus bestimmen wir die Werte von den drei Unbekannten a, b, c.

Sind diese 3 Größen gefunden, so rechnen wir

mit $n = 1$: $y_1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$

mit $n = 2$: $y_2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$

mit $n = 3$: $y_1 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$

usw.

Aufgabe 161. Von einer arithmetischen Reihe II. Ordnung sei gegeben das fünfte Glied = 36, das achte Glied = 114 und das dreizehnte Glied = 344. Wie lautet die Reihe?

Auflösung. Wenn wir die obige Bezeichnung auf den vorliegenden Fall anwenden, erhalten wir

$$u = 5;\ y_u = y_5 = 36$$
$$v = 8;\ y_v = y_8 = 144$$
$$w = 13;\ y_w = y_{13} = 344.$$

Daraus ergibt sich das System der drei Gleichungen:

$$25a + 5b + c = 36$$
$$64a + 8b + c = 114$$
$$169a + 13b + c = 334.$$

Nach a, b und c aufgelöst, folgt:

$$a = \frac{5}{2};\ b = -\frac{13}{2} \text{ und } c = 6.$$

Hienach gibt

$$n = 1:\ y_1 = \frac{5}{2} \cdot 1^2 - \frac{13}{2} \cdot 1 + 6 = 2$$

$$n = 2:\ y_2 = \frac{5}{2} \cdot 4 - \frac{13}{2} \cdot 2 + 6 = 3$$

$$n = 3:\ y_3 = \frac{5}{2} \cdot 9 - \frac{13}{2} \cdot 3 + 6 = 9$$

$$n = 4:\ y_4 = \frac{5}{2} \cdot 16 - \frac{13}{2} \cdot 4 + 6 = 20.$$

usw.

Frage 72. Welche weitere Folgerung läßt sich aus

$$y_n = an^2 + bn + c$$

ableiten?

Erkl. 39. In der analytischen Geometrie liefert die Gleichung zweiten Grades $y = ax^2 + bx + c$ eine Parabel zweiter Ordnung.

Die Punkte der Abszissenachse mit den Werten $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ usw. bestimmen die zugehörigen Ordinaten y_1, y_2, y_3 ... Dadurch wird auf der Parabel die Punktreihe P_1, P_2, P_3 ... gefunden, welche die geometrische Darstellung der arithmetischen Reihe II. Ordnung bildet.

Antwort. Wie in Frage 61 ersetzen wir n durch x und y_n durch y und erhalten

$$y = ax^2 + bx + c;$$

hier ist die rechte Seite eine Funktion zweiten Grades von der veränderlichen Größe x; in letztere haben wir für x die Werte 1, 2, 3... usw. einzusetzen, um die Zahlen y_1, y_2, y_3 ... u. s. f. zu erhalten. Wir haben also den **Satz:** Setzen wir in einer Funktion zweiten Grades $ax^2 + bx + c$ für x nach und nach die auf einande-

Wir sehen auch aus den vorausgegangenen Betrachtungen, daß diese ganze Punktreihe bestimmt ist, wenn drei Punkten P_u, P_v, P_w bekannt sind.

folgenden ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . ., so bilden die hiedurch erhaltenen Werte y_1, y_2, y_3 . . . eine arithmetische Reihe II. Ordnung.

Frage 73. Wie erhält man in einer arithmetischen Reihe II. Ordnung, von welcher das Anfangsglied der Hauptreihe und die Anfangsglieder der ersten und zweiten Differenzenreihen gegeben sind, die Summe der n ersten Glieder der Hauptreihe?

Antwort. Hier gelten als bekannt die 4 Größen y_1, $\triangle y_1$, $\triangle^2 y_1$ und n; gesucht ist eine Formel, welche uns den Wert der Summe

$$s = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + y_n$$

in den gegebenen vier Größen ausdrückt.

Aus Frage 69 wissen wir, daß:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_1 \\
y_2 &= y_1 + \triangle y_1 \\
y_3 &= y_1 + 2\triangle y_1 + \triangle^2 y_1 \\
y_4 &= y_1 + 3\triangle y_1 + 3\triangle^2 y_1 \\
y_5 &= y_1 + 4\triangle y_1 + 6\triangle^2 y_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= y_1 + (n-1)\triangle y_1 + \binom{n-1}{2}\triangle^2 y_1
\end{aligned}$$

ist. Durch Addition gewinnen wir daraus:

$$s = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots + y_n = n y_1 + \left\{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right\}\triangle y_1$$
$$+ \left\{1 + 3 + 6 + \cdots + \binom{n-1}{2}\right\}\triangle^2 y_1.$$

Nun ist nach Frage 12

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}$$

Somit folgt als Summenformel:

$$s = n y_1 + \binom{n}{2}\triangle y + \binom{n}{3}\triangle^2 y_1 \quad \ldots \text{№ } 23.$$

Aufgabe 162. Wie groß ist in der Reihe 5, 3, 9, 23 ... die Summe der 10 ersten Glieder?

Auflösung. Aus $y_1 = 5$, $y_2 = 3$, $y_3 = 9$, $y_4 = 23$ folgt $\triangle y_1 = -2$, $\triangle y_2 = 6$, $\triangle y_3 = 14$, $\triangle^2 y_1 = 8$, $\triangle^2 y_2 = 8$ u. s. f.

Dies ergibt für $n = 10$:

$$s = 10 y_1 + \binom{10}{2} \triangle y_1 + \binom{10}{3} \triangle^2 y_1$$

$$= 10 . 5 + 45 (-2) + 120 . 8$$

$$= 50 - 90 + 960 = 920.$$

Aufgabe 163. Wie heißt in der Reihe 6, 13, 24, 39 das n^{te} Glied und welches ist der Ausdruck für die Summe der n ersten Glieder?

Antwort. Aus $y_1 = 6$, $y_2 = 13$ und $y_3 = 24$ leiten wir ab $\triangle y_1 = 7$ und $\triangle y_2 = 4$; daher ist nach Frage 69 und 73

$$y_n = 6 + (n-1) 7 + \binom{n-1}{2} 4 = 2n^2 + n + 3$$

$$s = 6n + \binom{n}{2} \cdot 7 + \binom{n}{3} 4$$

$$= \frac{4n^3 + 9n^2 + 23n}{6}$$

Frage 74. Wie lautet die Summenformel für die n ersten Glieder einer Reihe II. Ordnung, wenn der in Frage 73 gefundene Ausdruck nach Potenzen von n geordnet wird?

Antwort. Es wird:

$$s = n y_1 + \frac{n(n-1)}{2} \triangle y_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \triangle^2 y \text{ oder}$$

$$s = \frac{\triangle^2 y_1}{6} . n^3 + \left(\frac{\triangle y_1}{2} - \frac{\triangle^2 y_1}{2} \right) n^2 + \frac{6 y_1 - 3 \triangle y_1 + 2 \triangle^2 y_1}{6} . n$$

Erkl. 40. Da $s = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma$ ist, folgt, daß die Summe s eine Funktion dritten Grades der Stellenzahl n ist, während das zu n gehörige Glied der Hauptreihe nach Frage 70 durch eine Funktion zweiten Grades von n ausgedrückt wird. Diese Andeutung ist wichtig für spätere Betrachtungen.

Setzen wir nun:

$$\alpha = \frac{\triangle^2 y_1}{6}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left\{\triangle y_1 - \triangle^2 y_1\right\} \text{ und}$$

$$\gamma = \frac{1}{6}\left\{6 y_1 - 3\triangle y_1 + 2\triangle^2 y_1\right\},$$

so folgt:

$$s = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n. \quad \ldots\ldots \text{№ } 24.$$

Frage 75. Welche Folgerungen gestattet dieser neue Ausdruck für die Summe s?

Antwort. Wir wollen an der Reihe 5, 3, 9, 23 usw. der Aufgabe 162 anknüpfen. Da dort $y_1 = 5$, $\triangle y_1 = -2$ und $\triangle^2 y_1 = 8$ ist, erhalten wir:

$$\alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left\{-2 - 8\right\} = -5.$$

$$\gamma = \frac{1}{6}\left\{30 + 6 + 16\right\} = \frac{52}{6} = \frac{26}{3}$$

Für genannte Reihe erhalten wir also nach der vorigen Formel für die Summe:

$$s = \frac{4}{3}n^3 - 5n^2 + \frac{26}{3}n.$$

Wählen wir wieder $n = 10$, so folgt die Summe s_{10} der 10 ersten Glieder

$$= \frac{4}{3} \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2 + \frac{26}{3} \cdot 10$$

$$\text{oder } s = 920$$

in Übereinstimmung mit dem früheren Resultat.

Wollen wir eine andere Summe finden, z. B. jene s_3 der drei ersten Glieder, so nehmen wir $n = 3$ und erhalten:

$$s_3 = \frac{4}{3} \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + \frac{26}{3} \cdot 3 = 17.$$

In gleicher Weise folgt mit $n = 5$ für die Summe s_5 der fünf ersten Glieder:

$$s_5 = \frac{4}{3} \cdot 5^3 - 5 \cdot 5^2 + \frac{26}{3} \cdot 5 = 85.$$

Wir sehen, daß bei Berechnung der drei Größen s_3, s_5 und s_{10} die Potenzen n^3, n^2 und n des Stellenzeigers n mit denselben konstanten Koeffizienten

$$\alpha = \frac{4}{3}, \quad \beta = -5 \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{26}{3}$$

verknüpft gewesen sind, und dies auch der Fall ist bei der Berechnung jeder andern Summe.

Dadurch wird die Umkehrung der Aufgabe ermöglicht: aus s_3, s_5 und s_{10} die Werte von α, β und γ zu finden, und damit die Reihe. Wir haben hiemit den **Satz:** Wenn wir von der Reihe II. Ordnung drei Summen mit ihren Stellenzahlen kennen, so läßt sich die Reihe berechnen.

Aufgabe 164. Von einer Reihe II. Ordnung sei gegeben die Summe s_u der u ersten Glieder, die Summe s_v der v ersten Glieder und s_w der w ersten Glieder. Wie erhält man die Reihe?

Auflösung. Aus der allgemeinen Summenformel $s = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n$ bilden wir die drei Gleichungen:

$$u^3 \alpha + u^2 \beta + u \gamma = s_u$$

$$v^3 \alpha + v^2 \beta + v \gamma = s_v$$

$$w^3 \alpha + w^2 \beta + w \gamma = s_w$$

Aus diesen bestimmen wir die Werte der drei Unbekannten α, β und γ.

Sind diese drei Größen gefunden, so rechnen wir:

mit $n = 1 \ldots s_1 = \alpha \cdot 1^3 + \beta \cdot 1^2 + \gamma \cdot 1$

mit $n = 2 \ldots s_2 = \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + \gamma \cdot 2$

mit $n = 3 \ldots s_3 = \alpha \cdot 3^3 + \beta \cdot 3^2 + \gamma \cdot 3.$

Nun ist aber s_1 nichts anderes als das erste Glied y_1 der Reihe; ferner ist $s_2 = y_1 + y_2$, daher liefer

$s_2 - s_1$ den Wert des II. Gliedes y_2; da endlich

$$s_3 = y_1 + y_2 + y_3 = s_2 + y_3$$

ist, so erhalten wir das dritte Glied $y_3 = s_3 - s_2$ u. s. f.

Aufgabe 165. In einer Reihe II. Ordnung ist die Summe der fünf ersten Glieder = 70, der sieben ersten Glieder = 154 und der 11 ersten Glieder = 462; wie heißt die Reihe?

Auflösung. Mit der vorigen Bezeichnung erhalten wir:

$$u = 5,\ s_u = s_5 = 70$$
$$v = 7,\ s_v = s_7 = 154 \text{ und}$$
$$w = 11,\ s_w = s_{11} = 462.$$

Hiemit folgen die Gleichungen:

$$125\alpha + 25\beta + 5\gamma = 70$$
$$343\alpha + 49\beta + 7\gamma = 154$$
$$1331\alpha + 121\beta + 11\gamma = 462.$$

Nach α, β und γ aufgelöst, bekommen wir:

$$\alpha = \frac{1}{6},\ \beta = 2 \text{ und } \gamma = -\frac{1}{6}$$

und hiemit folgt als allgemeine Summenformel:

$$s = \frac{1}{6}n^3 + 2n^2 - \frac{1}{6}n.$$

Nehmen wir jetzt $n = 1$, so folgt

$$s_1 = \frac{1}{6}\cdot 1^3 + 2\cdot 1^2 - \frac{1}{6}\cdot 1 = 2;$$

ferner

gibt $n = 2$: $s_2 = \frac{1}{6}\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 - \frac{1}{6}\cdot 2 = 9$, ebenso

gibt $n = 3$: $s_3 = \frac{1}{6}\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 - \frac{1}{6}\cdot 3 = 22$ und

$n = 4$: $s_4 = \frac{1}{6}\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 - \frac{1}{6}\cdot 4 = 42$ u. s. f.

Daher ist $y_1 = s_1 = 2$

$$y_2 = s_2 - s_1 = 9 - 2 = 7$$
$$y_3 = s_3 - s_2 = 22 - 9 = 13$$
$$y_4 = s_4 - s_3 = 42 - 20 = 20 \text{ usw.}$$

Anmerkung: Weitere Aufgaben folgen am Schlusse dieses Abschnittes.

3. Arithmetische Reihen dritter Ordnung.

Frage 76. Was ist unter einer **arithmetischen** Reihe III. Ordnung **zu verstehen?**

Antwort. Wir wollen von der Reihe der Kubikzahlen ausgehen:

$$1^3 = 1,\quad 2^3 = 8,\quad 3^3 = 27,\quad 4^3 = 64,$$
$$5^3 = 125,\ 6^3 = 216,\ 7^3 = 343,$$
$$8^3 = 512,\ 9^3 = 729,\ 10^3 = 1000 \text{ u.s.f.}$$

Nun bilden wir wieder nach der seitherigen Methode die ersten Differenzen: $8 - 1 = 7$; $27 - 8 = 19$; $64 - 27 = 37$; $165 - 64 = 61$ usw. Von dieser Reihe 7, 19, 37, 61 ... bilden wir wieder die Differenzen: $19-7=12$; $37-19=18$; $61-37=24$ usw. Da nun diese Zahlen nicht übereinstimmen, ist die gegebene Reihe 1, 8, 27, 64 ... keine Reihe II. Ordnung; wir bilden nun von der zweiten Differenzenreihe 12, 18, 24 ... nach dem seitherigen Verfahren abermals die Differenzen: $18 - 12 = 6$, $24 - 18 = 6$ ...; diese stimmen jetzt überein. Deshalb nennen wir wegen der Gleichheit der dritten Differenzen die gegebene Reihe eine solche dritter Ordnung.

In tabellarischer Zusammenstellung bekommen wir:

Hauptreihe	I. Differenzenreihe	II. Differenzenreihe	III. Differenzenreihe
1	$8 - 1 = 7$	$19 - 7 = 12$	$18 - 12 = 6$
8	$27 - 8 = 19$	$37 - 19 = 18$	$24 - 18 = 6$
27	$64 - 27 = 37$	$61 - 37 = 24$	$30 - 24 = 6$
64	$125 - 64 = 61$	$91 - 61 = 30$	$36 - 30 = 6$
125	$216 - 125 = 91$	$127 - 91 = 36$	....
216	$343 - 216 = 127$	....	
343	....		
....			

Frage 77. Warum ist die Reihe 1, 7, 18, 30, 39, 41, eine arithmetische Reihe III. Ordnung?

Antwort. Aus der Hauptreihe 1, 7, 18, 30, 39... bilden wir die I. Differenzenreihe:

$$7 - 1 = 6,\ 18 - 7 = 11,$$
$$30 - 18 = 12,\ 39 - 30 = 9 \text{ usw.}$$

Aus 6, 11, 12, 9 berechnen wir die II. Differenzenreihe:

$$11 - 6 = 5,\ 12 - 11 = 1,$$
$$9 - 11 = -3 \text{ usw.}$$

Daraus folgt für III. Differenzenreihe:

$$1 - 5 = -4,\quad -3 - 1 = -4 \text{ usw.}$$

Da alle Glieder dieser Reihe -4 lauten, ist die Hauptreihe III. Ordnung.

Frage 78. Wie lautet hienach die Definition einer arithmetischen Reihe III. Ordnung und welche allgemeine Darstellung läßt sich von ihr geben?

Antwort. Bildet man von einer gegebenen Reihe von Zahlen, der Hauptreihe, nach dem seitherigen Verfahren die I. Differenzenreihe, aus dieser dann die II. Differenzenreihe und endlich aus dieser die III. Differenzenreihe, so heißt die Hauptreihe eine Reihe III. Ordnung, wenn die III. Differenzenreihe eine konstante ist.

Sind $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$ die Glieder der Hauptreihe, so setzen wir wieder:

$$\triangle y_1 = y_2 - y_1,\quad \triangle y_2 = y_3 - y_2,$$
$$\triangle y_3 = y_4 - y_3 \text{ usw.}$$

Aus der ersten Differenzenreihe $\triangle y_1$, $\triangle y_2$, $\triangle y_3$, $\triangle y_4$ bilden wir die zweiten Differenzen:

$$\triangle^2 y_1 = \triangle y_2 - \triangle y_1,\ \triangle^2 y_2 = \triangle y_3 - \triangle y_2$$
$$\triangle^2 y_3 = \triangle y_4 - \triangle y_3 \text{ usw.}$$

Aus der zweiten Differenzenreihe $\triangle^2 y_1$, $\triangle^2 y_2$, $\triangle^2 y_3$, $\triangle^2 y_4 \ldots$ berechnen wir die dritten Differenzen:

$$\triangle^3 y_1 = \triangle^2 y_2 - \triangle^2 y_1,\quad \triangle^3 y_2 = \triangle^2 y_3 - \triangle^2 y_2,$$
$$\triangle^3 y_3 = \triangle^2 y_4 - \triangle^2 y_3 \text{ usw.}$$

41. **Erkl.** $\triangle^3 y_1$, $\triangle^3 y_2$, $\triangle^3 y_3$ usw. sind also die Bezeichnungen für Zahlen wie $\triangle^2 y_1$ und $\triangle y_1$ usw.

Weil die Hauptreihe III. Ordnung sein soll, so müssen die Glieder der dritten Differenzenreihe $\triangle^3 y_1$, $\triangle^3 y_2$, $\triangle^3 y_3$ usw. übereinstimmen.

Tabellarisch zusammengefaßt, folgt:

Hauptreihe	I. Differenzenreihe	II. Differenzenreihe	III. Differenzenreihe
y_1			
y_2	$y_2 - y_1 = \triangle y_1$	$\triangle y_2 - \triangle y_1 = \triangle^2 y_1$	$\triangle^2 y_2 - \triangle^2 y_1 = \triangle^3 y_1$
y_3	$y_3 - y_2 = \triangle y_2$	$\triangle y_3 - \triangle y_2 = \triangle^2 y_2$	$\triangle^2 y_3 - \triangle^2 y_2 = \triangle^3 y_2$
y_4	$y_4 - y_3 = \triangle y_3$	$\triangle y_4 - \triangle y_3 = \triangle^2 y_3$	$\triangle^2 y_4 - \triangle^2 y_3 = \triangle^3 y_3$
y_5	$y_5 - y_4 = \triangle y_4$	$\triangle y_5 - \triangle y_4 = \triangle^2 y_4$	. . . .
y_6	$y_6 - y_5 = \triangle y_5$	. . . .	
. . . . .	. . . .		

79. Frage. Welche Bestimmungsstücke sind für eine Reihe III. Ordnung erforderlich?

Antwort. Eine Reihe III. Ordnung ist bestimmt, 1. durch vier aufeinander folgende Glieder der Hauptreihe oder 2. durch das erste Glied der Hauptreihe und den Anfangsgliedern der drei Differenzenreihen. Kennt man z. B. y_3, y_4, y_5 und y_6, so gewinnen wir aus diesen $\triangle y_3$, $\triangle y_4$ und $\triangle y_5$; letztere ergeben $\triangle^2 y_3$ und $\triangle^2 y_4$, deren Differenz $\triangle^3 y_3$ liefert; nun läßt sich die Ergänzung sowohl nach unten wie nach oben leicht ausführen. — Daß andrerseits y_1, $\triangle y_1$, $\triangle^2 y_1$ und $\triangle^3 y_1$ zur Herleitung der Reihe genügen, ist ohne weitere Erklärung ersichtlich.

166. Aufgabe. Wie heißt die Reihe III. Ordnung, von welcher 21, 34, 54 und 83 vier aufeinanderfolgende Glieder sind?

Antwort. Wir nehmen $y_1 = 21$, $y_2 = 34$, $y_3 = 54$ und $y_4 = 83$; dies giebt:

$$\triangle y_1 = y_2 - y_1 = 34 - 21 = 13;$$
$$\triangle y_2 = y_3 - y_2 = 54 - 34 = 20;$$
$$\triangle y_3 = y_4 - y_3 = 83 - 54 = 29\cdot$$

$\triangle^2 y_1 = \triangle y_2 - \triangle y_1 = 20 - 13 = 7;$
$\triangle^2 y_2 = \triangle y_3 - \triangle y_2 = 29 - 20 = 9;$
$\triangle^3 y_1 = \triangle^2 y_2 - \triangle^2 y_1 = 9 - 7 = 2 =$ konstant; d. h.
$\triangle^3 y_1 = \triangle^3 y_2 = \triangle^3 y_3 = \cdots\cdot = 2.$ Dies liefert
$\triangle^2 y_3 = \triangle^2 y_2 + \triangle^3 y_2 = 9 + 2 = 11;$
$\triangle^2 y_4 = \triangle^2 y_3 + \triangle^3 y_3 = 11 + 2 = 13;$
$\triangle^2 y_5 = \triangle^2 y_4 + \triangle^3 y_4 = 13 + 2 = 15$ usw. **Daraus:**
$\triangle y_4 = \triangle y_3 + \triangle^2 y_3 = 29 + 11 = 40;$
$\triangle y_5 = \triangle y_4 + \triangle^2 y_4 = 40 + 13 = 53;$
$\triangle y_6 = \triangle y_5 + \triangle^2 y_5 = 53 + 15 = 68$ usw.

Hiemit leiten wir nun ab:

$y_5 = y_4 + \triangle y_4 = 83 + 40 = 123;$
$y_6 = y_5 + \triangle y_5 = 123 + 53 = 176;$
$y_7 = y_6 + \triangle y_6 = 176 + 68 = 244$ usw.

Die gesuchte Reihe lautet also:
21, 34, 54, 83, 123, 176, 244 usw.

---

80. Frage. Wie lautet die Fortsetzung dieser Reihe nach oben?

Antwort. Wir wenden das Verfahren auf die Reihe III. Ordnung aus, welches wir in Aufgabe 156 auf die Reihe II. Ordnung angewandt haben und erhalten: die III. Differenzenreihe ist eine konstante; alle Glieder lauten 2; die II. Differenzenreihe ist die Reihe I. Ordnung 7, 9, 11, 13 . . , welche nach oben fortgesetzt heißt:

$$\triangle^2 y_1 = 7;\ \triangle^2 y_0 = 5;\ \triangle^2 y_{-1} = 3;$$
$$\triangle^2 y_{-2} = 1 \text{ usw.}$$

Sie liefert nun die Fortsetzung der ersten Differenzenreihe nach der Formel:

$$\triangle y_{n-1} = \triangle y_n - \triangle^2 y_{n-1}, \text{ weil ja}$$
$$\triangle y_n = \triangle y_{n-1} + \triangle^2 y_{n-1}$$

sein muß. Z. B.

$\triangle y_1 = \triangle y_2 - \triangle^2 y_1 = 20 - 7 = 13;$
$\triangle y_0 = \triangle y_1 - \triangle^2 y_0 = 13 - 5 = 8;$
$\triangle y_{-1} = \triangle y_0 - \triangle^2 y_{-1} = 8 - 3 = 5;$
$\triangle y_{-2} = \triangle y_{-1} - \triangle^2 y_{-2} = 5 - 1 = 4$ usw.

Faravjunel

Heft 1507	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.
— Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas. —

Heft 7

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist vollständig in etwa 20 Heften à 25 Pf.

Nach der Formel

$$y_{n-1} = y_n - \Delta y_{n-1}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_2 - \Delta y_1 = 34 - 13 = 21 \\
y_0 &= y_1 - \Delta y_0 = 21 - 8 = 13 \\
y_{-1} &= y_0 - \Delta y_{-1} = 13 - 5 = 8 \\
y_{-2} &= y_{-1} - \Delta y_{-2} = 8 - 4 = 4 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Stellen wir die Ergebnisse der beiden letzten Antworten zusammen, so erhalten wir:

n	Hauptreihe y	I. Differenzenreihe Δy	II. Differenzenreihe $\Delta^2 y$	III. Differenzenreihe $\Delta^3 y$
....	....	....	....	....
-3	$y_{-3} = -1$	$\Delta y_{-3} = 5$	$\Delta^2 y_{-3} = -1$	$\Delta^3 y_{-3} = 2$
-2	$y_{-2} = 4$	$\Delta y_{-2} = 4$	$\Delta^2 y_{-2} = +1$	$\Delta^3 y_{-2} = 2$
-1	$y_{-1} = 8$	$\Delta y_{-1} = 5$	$\Delta^2 y_{-1} = 3$	$\Delta^3 y_{-1} = 2$
0	$y_0 = 13$	$\Delta y_0 = 8$	$\Delta^2 y_0 = 5$	$\Delta^3 y_0 = 2$
1	$y_1 = 21$	$\Delta y_1 = 13$	$\Delta^2 y_1 = 7$	$\Delta^3 y_1 = 2$
2	$y_2 = 34$	$\Delta y_2 = 20$	$\Delta^2 y_2 = 9$	$\Delta^3 y_2 = 2$
3	$y_3 = 54$	$\Delta y_3 = 29$	$\Delta^2 y_3 = 11$	$\Delta^3 y_3 = 2$
4	$y_4 = 83$	$\Delta y_4 = 40$	$\Delta^2 y_4 = 13$	....
5	$y_5 = 123$	$\Delta y_5 = 53$	....	
6	$y_6 = 176$	....		
....	....			

Aufgabe 167. Wie lautet die Reihe III. Ordnung mit dem Anfangsglied 5 der Hauptreihe und den Anfangsgliedern 10, 9 und 3 der ersten, zweiten und dritten Differenzenzeihen?

Auflösung. Wir nehmen hier:

$$y_1 = 5;\ \Delta y_1 = 10,\ \Delta^2 y_1 = 9$$
$$\text{und } \Delta^3 y_1 = 3.$$

Da alle Glieder der dritten Differenzenreihe = 3 sein müssen, folgt als zweite Differenzenreihe:

$$\Delta^2 y_1 = 9,\ \Delta^2 y_2 = 12,\ \Delta^2 y_3 = 15;$$
$$\Delta^2 y_4 = 18 \text{ usw.}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Delta y_2 &= \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 = 10 + 9 = 19 \\
\Delta y_3 &= \Delta y_2 + \Delta^2 y_2 = 19 + 12 = 31 \\
\Delta y_4 &= \Delta y_3 + \Delta^2 y_3 = 31 + 15 = 46
\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \Delta y_1 = 5 + 10 = 15 \\
y_3 &= y_2 + \Delta y_2 = 15 + 19 = 34 \\
y_4 &= y_3 + \Delta y_3 = 34 + 31 = 65 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

In der Zusammenstellung erhalten wir hienach:

$\boxed{5}$	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$	$\boxed{3}$
15	19	12	3
34	31	15	3
65	46	18	3
111	64	21	
175	85		
260			

Frage 81. Wenn von einer Reihe III. Ordnung das Anfangsglied y_1 der Hauptreihe und die Anfangsglieder $\triangle y_1$, $\triangle^2 y_1$ und $\triangle^3 y_1$ der drei Differenzenreihen gegeben sind; wie läßt sich dann aus diesen vier Größen das allgemeine Glied y_n berechnen? Hiebei bedeutet n den bekannten Stellenzeiger dieses Gliedes.

Antwort. Die allgemeine Darstellung einer Reihe III. Ordnung in Frage 78 gibt uns wegen der Gleichheit der Größen $\triangle^3 y_1$, $\triangle^3 y_2$, $\triangle^3 y_3$ usw.:

$$\triangle^2 y_2 = \triangle^2 y_1 + \triangle^3 y_1$$
$$\triangle^2 y_2 = \triangle^2 y_2 + \triangle^3 y_2 = \triangle^2 y_1 + 2\triangle^3 y_1$$
$$\triangle^2 y_4 = \triangle^2 y_3 + \triangle^3 y_3 = \triangle^2 y_1 + 3\triangle^3 y_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\triangle^2 y_{n-2} = \triangle^2 y_1 + (n-3)\triangle^3 y_1 \quad \text{№} 25$$

Erkl. 42. Die Glieder $\triangle^2 y_1$, $\triangle^2 y_2$, $\triangle^3 y_3$ usw. der zweiten Differenzenreihe bilden eine arithmetische Reihe I. Ordnung mit der konstanten Differenz $\triangle^3 y_1$; daher ist nach der Formel 20 das $n-2^{\text{te}}$ Glied y_{n-2} dieser Reihe $= \triangle^2 y_1 + (n-3)\triangle^3 y_1$.

Für die Glieder der ersten Differenzenreihe folgt jetzt:

$$\triangle y_2 = \triangle y_1 + \triangle^2 y_1$$
$$\triangle y_3 = \triangle y_2 + \triangle^2 y_2 = \triangle y_1 + \triangle^2 y_1 + \triangle^2 y_2$$
$$= \triangle y_1 + 2\triangle^2 y_1 + \triangle^3 y_1$$
$$\triangle y_4 = \triangle y_3 + \triangle^2 y_3 = \triangle y_1 + 3\triangle^2 y_1 + 3\triangle^3 y_1$$
$$\triangle y_5 = \triangle y_4 + \triangle^2 y_4 = \triangle y_1 + 4\triangle^2 y_1 + 6\triangle^3 y_1$$
$$\triangle y_6 = \triangle y_5 + \triangle^2 y_5 = \triangle y_1 + 5\triangle^2 y_1 + 10\triangle^3 y_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\triangle y_{n-1} = \triangle y_{n-2} + \triangle^2 y_{n-2} = \triangle y_1 + (n-2)\triangle^2 y_1 + \binom{n-2}{2}\triangle^3 y_1 \quad \text{№} 26.$$

Erkl. 43. Die Glieder $\triangle y_1$, $\triangle y_2$, $\triangle y_3$ usw. der ersten Differenzenreihe bilden für sich eine arithmetische Reihe II. Ordnung mit dem Anfangsglied $\triangle y_1$ der Hauptreihe, dem Anfangsglied $\triangle^2 y_1$ der ersten und dem Anfangsglied $\triangle^3 y_1$ der zweiten

Da aber

$$y_n = y_1 + (\triangle y_1 + \triangle y_2 + \triangle y_5 + \cdots + \triangle y_{n-1}) \text{ ist,}$$

Differenzenreihe; wenden wir also die Formel 21 der Frage 69 an auf das $n-1$te Glied $\triangle y_{n-1}$, so erhalten wir:

$$\triangle y_{n-1} = \triangle y_1 + (n-2)\triangle^2 y_1 + \binom{n-2}{2}\triangle^3 y_1$$

Bezüglich der Glieder $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ der Hauptreihe gilt auch hier, was in Erkl. 37 ausgeführt werden ist.

Erkl. 44. Daß $1+3+6+10+\cdots+\binom{n-2}{2}=\binom{n-1}{3}$ ist, folgt aus der Frage 12

so folgt:

$$y_n = y_1 + (n-1)\triangle y + \{1+2+3+4+\cdots+(n-2)\}\triangle^2 y_1 + \left\{1+3+6+\cdots+\binom{n-2}{2}\right\}\triangle^3 y_1;$$

daraus erhalten wir für das allgemeine Glied:

$$y_n = y_1 + (n-1)\triangle y_1 + \binom{n-1}{2}\triangle^2 y_1 + \binom{n-1}{3}\triangle^3 y_1 \ldots \text{№ } 27$$

Aufgabe 168. Wie heißt in der Reihe III. Ordnung 21, 34, 54, 83... der Frage 80 das VII. Glied?

Auflösung. Dort ist $y_1 = 21$, $\triangle y_1 = 13$; $\triangle^2 y_1 = 7$, $\triangle^3 y_1 = 2$; daher muß nach obiger Formel sein:

$$y_7 = y_1 + 6\triangle y_1 + \binom{6}{2}\triangle^2 y_1 + \binom{6}{3}\triangle^3 y_1$$
$$= 21 + 6 \cdot 13 + 15 \cdot 7 + 20 \cdot 2 = 244.$$

Aufgabe 169. Wie heißt die XI. Kubikzahl?

Erkl. 45. In gewöhnlicher Fassung lautet die obige Aufgabe: Wie groß ist 11^3; die Lösung muß hienach 1331 sein.

Auflösung. Nach Frage 76 bilden die Kubikzahlen eine Reihe III. Ordnung mit $y_1 = 1$, $\triangle y_1 = 7$; $\triangle^2 y = 12$, $\triangle^3 y_1 = 6$. Obige Formel gibt nun für $n = 11$:

$$y_{11} = y_1 + 10\triangle y_1 + \binom{10}{2}\triangle^2 y_1 + \binom{10}{3}\triangle^3 y_1$$
$$= 1 + 10 \cdot 7 + 45 \cdot 12 + 120 \cdot 6 = 1331.$$

Frage 82. Wie lautet die Formel für das allgemeine Glied y_n nach der Ordnung des vorhin gefundenen Ausdruckes nach Potenzen von n?

Antwort. Aus

$$y_n = y_1 + (n-1)\triangle y_1 + \binom{n-1}{2}\triangle^2 y_1 + \binom{n-1}{3}\triangle^3 y_1$$
$$= y_1 + (n-1)\triangle y_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\triangle^2 y_1 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\triangle^3 y_1$$
$$= y_1 + (n-1)\triangle y_1 + \frac{n^2-3n+2}{2}\triangle^2 y_1 + \frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}\triangle^3 y_1$$

bilden wir:

$$y_n = \frac{1}{6}\triangle^3 y_1 \,.\, n^3 + \left(\frac{1}{2}\triangle^2 y_1 - \triangle^3 y_1\right) n^2 + \left(\triangle y_1 - \frac{3}{2}\triangle^2 y_1 + \frac{11}{6}\triangle^3 y_1\right) n$$
$$+ y_1 - \triangle y_1 + \triangle^2 y_1 - \triangle^3 y_1.$$

Wenn wir voraussetzen, daß von der Reihe III. Ordnung die vier Größen y_1, $\triangle y_1$, $\triangle^2 y_1$ und $\triangle^3 y_1$ gegeben seien, so lassen sich aus diesen jetzt die 4 **Hilfsgrößen** bilden:

$$a = \frac{1}{6}\triangle^3 y_1$$

$$b = \frac{1}{2}\triangle^2 y_1 - \triangle^3 y_1$$

$$c = \triangle y_1 - \frac{3}{2}\triangle^2 y_1 + \frac{11}{6}\triangle^3 y_1 \text{ und}$$

$$d = y_1 - \triangle y_1 + \triangle^2 y_1 - \triangle^3 y_1.$$

Dann wird

$$y_n = an^3 + bn^2 + cn + d \quad .. \text{№} 28$$

die verlangte **zweite Formel für das allgemeine Glied** y_n.

Wählen wir als Beispiel wieder wie in Aufgabe 166 die Reihe 21, 34, 54, 83 .. mit $y_1 = 21$, $\triangle y_1 = 13$, $\triangle^2 y_1 = 7$ und $\triangle^3 y_1 = 2$, so folgt:

$$a = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot 7 - 2 = \frac{3}{2}$$

$$c = 13 - \frac{3}{2} \cdot 7 + \frac{11}{6} \cdot 2 = \frac{37}{6} \text{ und}$$

$$d = 21 - 13 + 7 - 2 = 13;$$

daher ist:

$$y_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{37}{6}n + 13;$$

$$n = 7 \text{ gibt } y_7 = \frac{1}{3} \cdot 7^3 + \frac{3}{2} \cdot 7^2 + \frac{37}{6} \cdot 7 + 13 = 244.$$

$$n = 9 \quad ,, \quad y_9 = \frac{1}{3} \cdot 9^3 + \frac{3}{2} \cdot 9^2 + \frac{37}{6} \cdot 9 + 13 = 433.$$

$$n = 13 \quad ,, \quad y_{13} = \frac{1}{3} \cdot 13^3 + \frac{3}{2} \cdot 13^2 + \frac{37}{6} \cdot 13 + 13 = 1079.$$

Frage 83. Welche Folgerung gestattet die vorhin gefundene Formel

$$y_n = an^3 + bn^2 + cn + d?$$

Antwort. Da in ein und derselben Reihe die vier Größen a, b, c und d für jedes Glied den gleichen Wert besitzen, so lassen sich diese 4 Größen a, b, c und d berechnen, wenn 4 Glieder der Hauptreihe mit ihren Stellenzahlen gegeben sind und hiemit ist dann die Aufstellung der ganzen Reihe ermöglicht.

Aufgabe 170. Von einer arithmetischen Reihe III. Ordnung seien die vier Glieder y_u, y_v, y_w und y_t mit den Stellenzeigern u, v, w und t gegeben. Die Reihe zu berechnen.

Auflösung. Aus der Formel

$$y_n = an^3 + bn^2 + cn + d$$

bilden wir das System der vier Gleichungen:

$$u^3 a + u^2 b + uc + d = y_u$$
$$v^3 a + v^2 b + vc + d = y_v$$
$$w^3 a + w^2 b + wc + d = y_w$$
$$t^3 a + t^2 b + tc + d = y_t.$$

Da u, v, w, t und y_u, y_v, y_w und y_t bekannt sind, so lassen sich aus obigen Gleichungen die vier Unbekannten a, b, c und d berechnen. Sind diese vier Größen gefunden, so erhalten wir:

mit $n = 1$: $y_1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$

„ $n = 2$: $y_2 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d$

„ $n = 3$: $y_3 = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$ usw.

Aufgabe 171. Wie heißt die Reihe III. Ordnung, deren:

viertes Glied $= 7$
siebentes „ $= 37$
zehntes „ $= 166$
zwölftes „ $= 347$?

Auflösung. Wir haben hier:

$$u = 4;\quad y_u = 7.$$
$$v = 7;\quad y_v = 37.$$
$$w = 10;\quad y_w = 166.$$
$$t = 12;\quad y_t = 347.$$

Diese Größen liefern die vier Gleichungen:

$$64a + 16b + 4c + d = 7$$
$$343a + 49b + 7c + d = 37$$
$$1000a + 100b + 10c + d = 166$$
$$1728a + 144b + 12c + d = 347.$$

Suchen wir diese in gewöhnlicher Weise auf, so erhalten wir:

$$a = \frac{1}{2};\ b = -5;\ c = \frac{37}{2} \text{ und } d = -19.$$

Diese vier Größen geben jetzt:

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + \frac{37}{2} \cdot 1 - 19 = -5$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + \frac{37}{2} \cdot 2 - 19 = 2$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + \frac{37}{2} \cdot 3 - 19 = 5 \text{ usw.}$$

Frage 84. Welche weitere Folgerung ergibt sich aus

$$y_n = an^3 + bn^2 + cn + d?$$

Erkl. 46. Wie in der analytischen Geometrie $y = ax + b$ eine gerade Linie, $y = ax^2 + bx + c$ eine gewöhnliche Parabel zweiter Ordnung ergibt (siehe Erklärung 34 und 39), so liefert jetzt

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

eine Parabel dritter Ordnung. Zu den Punkten der Abszissenachse $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ ... gehören die Ordinaten y_1, y_2, y_3 ... usw., deren Endpunkte P_1, P_2, P_3 ... auf der Kurve das geometrische Bild der arithmetischen Reihe III. Ordnung darstellen. Zur Bestimmmng dieser Punktreihe genügen irgend 4 Punkte P_u, P_v, P_w und P_t.

Antwort. Schreiben wir wieder x statt n und y statt y_n, so folgt:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Die rechte Seite stellt eine Funktion dritten Grades der veränderlichen Größe x vor; geben wir dieser die Werte 1, 2, 3 usw., so liefert sie uns die Zahlen y_1, y_2, y_3 ... Dies läßt sich zusammenfassen in dem **Satz:** Setzt man in einer Funktion dritten Grades

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

nach und nach für x die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 ..., so bilden die erhaltenen Zahlen y_1, y_2, y_3 ... eine arithmetische Reihe dritter Ordnung.

Frage 85. Wie erhält man in einer arithmetischen Reihe III. Ordnung die Summe der n ersten Glieder aus dem Anfangsglied der Hauptreihe und den Anfangsgliedern der drei Differenzenreihen?

Antwort. Wir haben den Wert der Summe

$$s = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n$$

aus den 4 Größen y_1, $\triangle y_1$, $\triangle^2 y_1$ und $\triangle^3 y_1$ abzuleiten.

Nach der Formel № 27 der Frage 81 ist:

$$y_1 = y_1$$
$$y_2 = y_1 + \triangle y_1$$
$$y_3 = y_1 + 2\triangle y_1 + \triangle^2 y_1$$
$$y_4 = y_1 + 3\triangle y_1 + 3\triangle^2 y_1 + \triangle^3 y_1$$
$$y_5 = y_1 + 4\triangle y_1 + 6\triangle^2 y_1 + 4\triangle^3 y_1$$
$$y_6 = y_1 + 5\triangle y_1 + 10\triangle^2 y_1 + 10\triangle^3 y_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = y_1 + (n-1)\triangle y_1 + \binom{n-1}{2}\triangle^2 y_1 + \binom{n-1}{3}\triangle^3 y_1.$$

Durch die Addition folgt:

$$\begin{aligned} s = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n = ny_1 &+ \left\{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right\}\triangle y_1 \\ &+ \left\{1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \binom{n-1}{2}\right\}\triangle^2 y_1 \\ &+ \left\{1 + 4 + 10 + \cdots + \binom{n-1}{3}\right\}\triangle^3 y_1 \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 2 ist:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} = \binom{n}{2}.$$

Nach Aufgabe 4 ist:

$$1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}$$

und nach Aufgabe 6 erhalten wir:

$$1 + 4 + 10 + 20 + \cdots + \binom{n-1}{3} = \binom{n}{4}.$$

Hiemit folgt als Summenformel:

$$s = ny_1 + \binom{n}{2}\triangle y_1 + \binom{n}{3}\triangle^2 y_1 + \binom{n}{4}\triangle^3 y_1 \;\ldots\ldots\; \text{№ } 29$$

Aufgabe 172. Wie groß ist in der Reihe 21, 34, 54, 83 ... die Summe der 10 ersten Glieder?

Siehe Aufgabe 168.

Auflösung. Da $y_1 = 21$, $\triangle y_1 = 13$; $\triangle^2 y_1 = 7$ und $\triangle^3 y_1 = 2$ und $n = 10$ ist, so folgt:

$$\begin{aligned} s &= 10y_1 + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}\triangle y_1 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}\triangle^2 y_1 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\triangle^3 y_1 \\ &= 10 \cdot 21 + 45 \cdot 13 + 120 \cdot 7 + 210 \cdot 2 \\ &= 2055. \end{aligned}$$

Aufgabe 173. Wie groß ist die Summe der n ersten Kubikzahlen, also $s = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$?

Antwort. Nach Aufgabe 169 ist

$$y_1 = 1, \quad \triangle y_1 = 7, \quad \triangle^2 y_1 = 7, \quad \triangle^3 y_1 = 6,$$

somit:

$$s = n + \binom{n}{2} 7 + \binom{n}{3} 12 + \binom{n}{4} 6$$

$$= n + \frac{n(n-1)7}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . 12 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} . 6$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

Erkl. 47. Wenn man die Klammern ausrechnet, so folgt:

$$s = n + \left\{-\frac{7n}{2} + \frac{7n^2}{2}\right\} + \left\{+4n - 6n^2 + 2n^3\right\} + \left\{-\frac{3n}{2} + \frac{11n^2}{4} - \frac{3n^3}{2} + \frac{n^4}{4}\right\}$$

$$= \frac{n^2}{4} + \frac{2n^3}{4} + \frac{n^4}{4} = \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Erkl. 48. Es ist hienach z. B.:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2.$$

Nun bedeutet aber $\frac{n(n+1)}{2}$ die Summe der n ersten ganzen Zahlen; wir finden hiermit den **Satz:** **Die Summe der n ersten Kubikzahlen ist gleich dem Quadrat der Summe der n ersten ganzen Zahlen.**

Frage 86. Welchen Ausdruck nimmt die obige Summenformel an nach der Ordnung nach Potenzen von n?

Erkl. 49. Es ist:

$$\binom{n}{2} = -\frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$$

$$\binom{n}{4} = -\frac{n}{4} + \frac{11n^2}{24} - \frac{n^3}{4} + \frac{n^4}{24}.$$

Hieraus folgt der neue Ausdruck für s.

Erkl. 50. Aus der Formel

$$s = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n$$

ersehen wir, daß die Summe s der n ersten Glieder der Reihe eine Funktion vierten Grades der Stellenzahl n ist, während das n^{te} Glied durch eine Funktion dritten Grades ausgedrückt wird.

Antwort. Aus

$$ny_1 + \binom{n}{2}\triangle y_1 + \binom{n}{3}\triangle^2 y_1 + \binom{n}{4}\triangle^3 y_1$$

erhält man durch Ausrechnung der einzelnen Klammern:

$$s = \frac{\triangle^3 y_1}{24} . n^4 + \left(\frac{\triangle^2 y_1}{6} - \frac{\triangle^3 y_1}{4}\right) n^3$$

$$+ \left(\frac{\triangle y_1}{2} - \frac{\triangle^2 y_1}{2} + \frac{11\triangle^3 y_1}{24}\right) n^2$$

$$+ \left(y_1 - \frac{\triangle y_1}{2} + \frac{\triangle^2 y_1}{3} - \frac{\triangle^3 y_1}{4}\right) n.$$

Wir setzen nun:

$$\alpha = \frac{\triangle^3 y_1}{24}$$

$$\beta = \frac{\triangle^2 y_1}{6} - \frac{\triangle^3 y_1}{4}$$

$$\gamma = \frac{\triangle y_1}{2} - \frac{\triangle^2 y_1}{2} + \frac{11 \triangle^3 y_1}{24}$$

$$\delta = y_1 - \frac{\triangle y_1}{2} + \frac{\triangle^2 y_1}{3} - \frac{\triangle^3 y_1}{4}$$

und erhalten hiemit:

$$s = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n \; .. \; \text{№ } 30$$

Frage 87. Welche Folgerungen lassen sich aus der neuen Form für die Summe s ziehen?

Antwort. Nehmen wir wie in Aufgabe 166 die Reihe 21, 34, 54, 83 mit $y_1 = 21$, $\triangle y_1 = 13$, $\triangle^2 y_1 = 7$ und $\triangle^3 y_2 = 2$, so nehmen die vier Größen α, β, γ, δ die Werte an:

$$\alpha = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}; \quad \beta = \frac{7}{6} - \frac{2}{4} = \frac{2}{3};$$

$$\gamma = \frac{13}{2} - \frac{7}{2} + \frac{22}{24} = \frac{47}{12}$$

$$\delta = 21 - \frac{13}{2} + \frac{7}{3} - \frac{2}{4} = \frac{49}{3}.$$

Wählen wir wieder $n = 10$, so erhalten wir für die Summe s_{10} der zehn ersten Glieder:

$$s_{10} = \frac{1}{12} \cdot 10^4 + \frac{2}{3} \cdot 10^3 + \frac{47}{12} \cdot 10^2 + \frac{49}{3} \cdot 10 = 2055.$$

Für $n = 4$ würde folgen:

$$s = \frac{1}{12} \cdot 4^4 + \frac{2}{3} \cdot 4^3 + \frac{47}{12} \cdot 4^2 + \frac{49}{3} \cdot 4 = 192 \text{ usw.}$$

Wir ersehen daraus, daß bei der Berechnung irgend einer Summe die 4 Größen α, β, γ und δ konstante Werte haben. Wir können somit umgekehrt auch diese vier Größen berechnen, wenn wir vier Summen mit den zugehörigen Stellenzeigern kennen, mit ander Worten: Sind von einer Rei

III. Ordnung mit ihren Stellenzeigern bekannt, so ist die Reihe bestimmt.

Bedeuten z. B. u, v, w, t die bekannten Stellenzeiger der vier gegebenen Summen s_u, s_v, s_w und s_t, so dienen zur Berechnung von den vier Unbekannten α, β, γ und δ die 4 Gleichungen:

$$u^4\alpha + u^3\beta + u^2\gamma + u\delta = s_u$$
$$v^4\alpha + v^3\beta + v^2\gamma + v\delta = s_v$$
$$w^4\alpha + w^3\beta + w^2\gamma + w\delta = s_w$$
$$t^4\alpha + t^3\beta + t^2\gamma + t\delta = s_t$$

Aus α, β, γ, δ gewinnt man dann mit $n = 1$:

$$s_1 = \alpha \,.\, 1^4 + \beta \,.\, 1^3 + \gamma \,.\, 1^2 + \delta \,.\, 1,$$

ebenso mit $n = 2$, 3 und 4 die Summe s_2, s_3 und s_4; hiemit folgt dann:

$$y_1 = s_1,\; y_2 = s_2 - s_1,\; y_3 = s_3 - s_2,$$
$$y_4 = s_4 - s_3 \text{ u. s. f.}$$

Aufgabe 174. Von einer Reihe III. Ordnung sei gegeben die Summe s_3 der drei ersten Glieder $= 20$, die Summe s_5 der fünf ersten Glieder $= 90$; ebenso $s_7 = 273$ und $s_{10} = 930$. Wie heißt die Reihe?

Auflösung. Wir haben hier gegeben:

$u = 3$, $v = 5$, $w = 7$ und $t = 10$

$s_u = 20$, $s_v = 90$, $s_w = 273$ und $s_t = 930$.

Daraus folgen die Gleichungen:

$$81\alpha + 27\beta + 9\gamma + 3\delta = 20$$
$$625\alpha + 125\beta + 25\gamma + 5\delta = 90$$
$$2401\alpha + 343\beta + 49\gamma + 7\delta = 273$$
$$10000\alpha + 1000\beta + 100\gamma + 10\delta = 930$$

Ihre Auflösung ergibt:

$$\alpha = \frac{1}{24};\quad \beta = \frac{14}{24};\quad \gamma = -\frac{25}{24}$$

$$\text{und } \delta = \frac{82}{24}.$$

Daraus erhalten wir:

$$s_1 = \frac{1}{24} + \frac{14}{24} - \frac{25}{24} + \frac{82}{24} = \frac{72}{24} = 3$$

$$s_2 = \frac{16}{24} + \frac{8 \cdot 14}{24} - \frac{4 \cdot 25}{24} + \frac{2 \cdot 82}{24} = \frac{192}{24} = 8$$

$s_3 = 20$ gegeben.

$$s_4 = \frac{256}{24} + \frac{64 \cdot 14}{24} - \frac{16 \cdot 25}{24} + \frac{4 \cdot 82}{24} = \frac{1080}{24} = 45.$$

Somit ist:

$$y_1 = 3$$
$$y_2 = s_2 - s_1 = 5$$
$$y_3 = s_3 - s_2 = 12$$
$$y_4 = s_4 - s_3 = 25 \text{ usw.}$$

4. Arithmetische Reihen von beliebig hoher Ordnung.

Frage 88. Was versteht man unter einer arithmetischen Reihe der r^{ten} Ordnung?

Erkl. 50. Es ist leicht einzusehen, daß die Zahlen der ersten Differenzenreihe $\triangle y_1$, $\triangle y_2$, $\triangle y_3 \ldots$ eine Reihe $r - 1^{\text{ter}}$ Ordnung bilden; ferner bilden die zweiten Differenzen $\triangle^2 y_1$, $\triangle^2 y_2$, $\triangle^2 y_3 \ldots$ eine solche $r - 2^{\text{ter}}$ Ordnug u. s. f., die vorletzte Differenzenreihe enthält die Zahlen $\triangle^{r-1} y_1$, $\triangle^{r-1} y_2$, $\triangle^{r-1} y_3 \ldots$, welche eine Reihe I. Ordnung darstellen.

Antwort. Bildet man aus einer gegebenen Reihe von Zahlen y_1, y_2, y_3, y_4 usw. die erste Differenzenreihe $\triangle y_1 = y_2 - y_1$, $\triangle y_2 = y_3 - y_2$, $\triangle y_3 = y_4 - y_3$ usw., aus dieser Reihe $\triangle y_1$, $\triangle y_2$, $\triangle y_3 \ldots$ die zweite Differenzenreihe

$$\triangle^2 y_1 = \triangle y_2 - \triangle y_1,\ \triangle^2 y_2 = \triangle y_3 - \triangle y_2,$$
$$\triangle^2 y_3 = \triangle y_4 - \triangle y_3 \text{ usw.,}$$

so läßt sich diese Bildung von Differenzenreihen so lange fortsetzen, bis eine Reihe mit gleichen Gliedern auftritt; trifft dies bei der r^{ten} Differenzenreihe ein, so daß $\triangle^r y_1 = \triangle^r y_2 = \triangle^r y_3$ usw. ist, so heißt die gegebene Reihe y_1, y_2, y_3 usw. eine arithmetische Reihe der r^{ten} Ordnung.

Frage 89. Welche Größen sind zu einer arithmetischen Reihe r^{ter} Ordnung erforderlich?

Antwort. Zu einer Reihe I. Ordnung genügt die Kenntnis von zwei auf einander folgenden Gliedern y_1 und y_2, zu einer Reihe II. Ordnung

braucht man drei y_1, y_2, y_3, zu einer Reihe III. Ordnung sind vier erforderlich y_1, y_2, y_3, y_4 (Siehe Fragen 68 und 79). In dieser Art weiter schließend, kommen wir auf den **Satz:**

Eine Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung ist durch $r+1$ auf einander folgende Glieder bestimmt.

Weiter genügt zur Aufstellung einer Reihe I. Ordnung die Kenntnis von y_1 und $\triangle y_1$; zu einer Reihe II. Ordnung braucht man y_1, $\triangle y_1$ und $\triangle^2 y_1$, zu einer Reihe III. Ordnung ist erforderlich y_1, $\triangle y_1$, $\triangle^2 y_1$, $\triangle^3 y_1$. Daraus folgt der **Satz:**

Eine Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung ist auch bestimmt durch das Anfangsglied y_1 der Hauptreihe und die Anfangsglieder $\triangle y_1$, $\triangle^2 y_1$, $\triangle^3 y_1 \ldots\ldots$, $\triangle^r y_1$ aller r Differenzenreihen.

Frage 90. Von einer Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung seien $r+1$ auf einander folgende Glieder $y_1, y_2 \ldots y_r, y_{r+1}$ gegeben. Wie lassen sich in diesen Größen die Glieder $\triangle y_1$, $\triangle y_2 \ldots$ der ersten Differenzenreihe, die Glieder $\triangle^2 y_1$, $\triangle^2 y_2 \ldots$ der zweiten, die Glieder $\triangle^3 y_1$, $\triangle^3 y_2 \ldots$ der dritten und allgemein die Glieder $\triangle^m y_1$, $\triangle^m y_2 \ldots$ der $m^{\underline{\underline{ten}}}$ Differenzenreihe ausdrücken? Dabei bedeute m irgend eine ganze Zahl zwischen 1 und r.

Antwort. Es ist $\triangle y_1 = y_2 - y_1$ und $\triangle y_2 = y_3 - y_2$ usw. Daraus folgt:

$$\triangle^2 y_1 = \triangle y_2 - \triangle y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1 \text{ und}$$

$$\text{ebenso } \triangle^2 y_2 = y_4 - 2y_3 + y_2;$$

daraus folgt:

$$\triangle^3 y_1 = \triangle^2 y_2 - \triangle^2 y_1 = (y_4 - 2y_3 + y_2) - (y_3 - 2y_2 + y_1) = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

und ebenso:

$$\triangle^3 y_2 = y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2;$$

daraus folgt:

$$\triangle^4 y_1 = \triangle^3 y_2 - \triangle^3 y_1 = (y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2) - (y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1)$$

oder:

$$\triangle^4 y_1 = y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1.$$

Daher ist zu vermuten, daß:

$$\Delta^5 y_1 = y_6 - 5y_5 + \binom{5}{2} y_4 - \binom{5}{3} y_3 + \binom{5}{4} y_2 - y_1$$

$$\Delta^6 y_1 = y_7 - 6y_6 + \binom{6}{2} y_5 - \binom{6}{3} y_4 + \binom{6}{4} y_3 - \binom{6}{5} y_2 + y_1$$

und allgemein:

$$\Delta^m y_1 = y_{m+1} - \binom{m}{1} y_m + \binom{m}{2} y_{m-1} - \binom{m}{3} y_{m-2} + \cdots + (-1)^m y_1 \quad \text{№ } 30$$

Frage 91. Wie kann die allgemeine Richtigkeit der vorigen Formel bewiesen werden?

Antwort. Wenn die vorige Formel richtig ist, so muß auch diejenige richtig sein, welche aus ihr dadurch hervorgeht, daß man jeden der unteren Stellenzeiger um 1 erhöht; d. h. es muß sein:

$$\Delta^m y_2 = y_{m+2} - \binom{m}{1} y_{m+1} + \binom{m}{2} y_m - \binom{m}{3} y_{m-1} + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} y_3 + (-1)^m y_2;$$

zieht man davon ab:

$$\Delta^m y_1 = \qquad y_{m+1} - \binom{m}{1} y_m + \binom{m}{2} y_{m-1} + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-2} \binom{m}{m-2} y_3 + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} y_2 + (-1)^m y_1,$$

so folgt:

$$\Delta^m y_2 - \Delta^m y_1 = y_{m+2} - (m+1) y_{m+1} + \left\{\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\right\} y_m - \left\{\binom{m}{3} + \binom{m}{2}\right\} y_{m-1}$$
$$+ \cdots + (-1)^{m-1} \left\{\binom{m}{m-1} + \binom{m}{m-2}\right\} y^3 + (-1)^m (m+1) y_2 + (-1)^{m+1} y_1$$

Da aber $\Delta^m y_2 - \Delta^m y_1 = \Delta^{m+1} y_1$ und nach Aufgabe 21

$$\binom{m}{r} + \binom{m}{r-1} = \binom{m+1}{r+1}$$

ist, so folgt:

$$\Delta^{m+1} y_1 = y_{m+2} - \binom{m+1}{1} y_{m+1} + \binom{m+1}{2} y_m - \binom{m+1}{3} y_{m-1}$$
$$+ \cdots + (-1)^{m+1} y_1.$$

Man sieht, daß $\triangle^{m+1}y_1$ demselben Bildungsgesetz folgt wie $\triangle^m y_1$, woraus wir schließen, daß wenn die obige Formel für $\triangle^m y_1$ gilt, sie auch für $\triangle^{m+1}y_1$ Giltigkeit hat. Oben ist nun gezeigt worden, daß sie für $m=3$ gilt; somit muß sie auch für $m=4$ richtig sein; aus der Giltigkeit für $m=4$ ergibt sich aber auch die für $m=5$ u. s. f. Hiemit ist die allgemeine Giltigkeit der Formel bewiesen.

Aufgabe 175. Wie heißen in der Reihe

$$-1,\ 0,\ 3,\ 9,\ 21,\ 47,\ 103,\ 216\ldots$$

die Anfangsglieder der Differenzenreihen?

Auflösung. Da hier $y_1=-1$, $y_2=0$, $y_3=3$, $y_4=9$, $y_5=21$, $y_6=47$ usw, ist, so liefert unsere vorige Formel für $m=1$:

$$\triangle y_1 = y_2 - y_1 = 0-(-1) = +1;$$

für $m=2$:

$$\triangle^2 y_1 = y_3 - \binom{2}{1}y_2 + y_1 = 3-1 = 2;$$

für $m=3$:

$$\triangle^3 y_1 = y_4 - \binom{3}{1}y_3 + \binom{3}{2}y_2 - y_1$$
$$= 9-9+0-(-1) = 1;$$

für $m=4$:

$$\triangle^4 y_1 = y_5 - \binom{4}{1}y_4 + \binom{4}{2}y_3 - \binom{4}{3}y_2 + y_1$$
$$= 21-36+18-1 = 2;$$

für $m=5$:

$$\triangle^5 y_1 = y_6 - \binom{5}{1}y_5 + \binom{5}{2}y_4 - \binom{5}{3}y_3 + \binom{5}{2}y_2 - y_1$$
$$= 47-105+90-30+1 = 3;$$

für $m=6$:

$$\triangle^6 y_1 = y_7 - \binom{6}{1}y_6 + \binom{6}{2}y_5 - \binom{6}{3}y_4 + \binom{6}{4}y_3 - \binom{6}{5}y_2 + y_1$$
$$= 103 - 6\cdot 47 + 15\cdot 21 - 20\cdot 9 + 15\cdot 3 - 0 = -1$$
$$= 463 - 463 = 0.$$

Da auch $\triangle^7 y_1 = 0$ herauskommt, ist die 5te Differenzenreihe die letzte oder unsere Reihe ist von der fünften Ordnung.

Frage 92. Wie ändert sich die Formel für die Differenzen, wenn man statt der $m+1$ ersten Glieder irgend welche $m+1$ auf einander Glieder $y_n, y_{n+1} \ldots y_{n+m}, y_{n+m+1}$ zur Berechnung benützt?

Antwort. Die Entwicklung der Frage 90 wiederholend, erhalten wir:

$$\triangle y_n = y_{n+1} - y_n$$
$$\triangle^2 y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$
$$\triangle^3 y_n = y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n$$

usw., so daß wir zu dem Ausdruck gelangen:

$$\triangle^m y_n = y_{n+m} - \binom{m}{1} y_{n+m-1} + \binom{m}{2} y_{n+m-2} - \cdots + (-1)^m y_n \ldots \text{№ } 32$$

dessen allgemeine Giltigkeit geradeso wie jene von $\triangle^m y_1$ in Frage 91 bewiesen werden kann.

Frage 93. Welche Bedeutung kommt dieser letzten Formel zu?

Antwort. Mit dieser Formel kann jedes beliebige Glied irgend einer Differenzenreihe einzeln berechnet werden.

Aufgabe 176. Welchen Wert hat in der Reihe der vorigen Aufgabe das Glied $\triangle^4 y_3$?

Auflösung. Es wird wegen $m = 4$ und $n = 3$:

$$\triangle^4 y_3 = y_7 - \binom{4}{1} y_6 + \binom{4}{2} y_5 - \binom{4}{3} y_4 + y_3$$
$$= 103 - 4 \cdot 47 + 6 \cdot 21 - 4 \cdot 9 + 3 = 232 - 224 = 8.$$

Aufgabe 177. Wie heißt in der Reihe:

1, — 1, 0, 3, 8, 18, 41, 92, 195, 385, 710 . . .

das Glied $\triangle^5 y_6$?

Auflösung. Weil $m = 5$ und $n = 6$ ist, folgt:

$$\triangle^5 y_6 = y_{11} - \binom{5}{1} y_{10} + \binom{5}{2} y_9 - \binom{5}{3} y_8 + \binom{5}{4} y_7 - y_6$$
$$= 710 - 5 \cdot 385 + 10 \cdot 195 - 10 \cdot 92 + 5 \cdot 41 - 18$$
$$= 2.$$

Frage 94. Von einer Reihe r^{ter} Ordnung sei gegeben das Anfangsglied y_1 der Hauptreihe, sowie die Anfangsglieder Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1 \ldots \Delta^r y_1$ der r Differenzenreihen. Wie lautet der Ausdruck für das n^{te} Glied y_n der Hauptreihe?

Antwort. Für eine Reihe I. Ordnung ist nach Frage 59

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1;$$

für eine Reihe II. Ordnung nach Frage 69 ist

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1$$

und für eine Reihe III. Ordnung ist nach Frage 81

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 y_1$$

Es läßt sich demnach vermuten, daß für eine Reihe IV. Ordnung:

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 y_1 + \binom{n-1}{4}\Delta^4 y_1$$

ist; so weiter schließend, gelangen wir bei einer Reihe r^{ter} Ordnung zur Formel:

$$y_n = y_1 + \binom{n-1}{1}\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 y_1 + \cdots + \binom{n-1}{r}\Delta^r y_1. \ldots \quad \text{№ } 33.$$

Frage 95. Wie läßt sich die Richtigkeit der vorigen Formel beweisen?

Antwort. Auf das n^{te} Glied der Hauptreihe folgt als nächstes Glied y_{n+1}; es ist aber $y_2 = y_1 + \Delta y_1$, $y_3 = y_2 + \Delta y_2$, $y_4 = y_3 + \Delta y_3$ usw.; somit muß sein:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n.$$

Die Zahlen der I. Differenzenreihe Δy_1, Δy_2, $\Delta y_3 \ldots \Delta y_n$ bilden für sich eine Reihe $r-1^{\text{ter}}$ Ordnung. Wäre nun das zu beweisende Gesetz wahr für eine Reihe r^{ter} Ordnung, so müßte es auch für die Reihe $r-1^{\text{ter}}$ Ordnung richtig sein mit dem Anfangsglied Δy_1 und den Anfangsgliedern $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1 \ldots \Delta^r y_1$ der $r-1$ Differenzenreihen, d. h. es müßte sein:

$$\Delta y_n = \Delta y_1 + \binom{n-1}{1}\Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^3 y_1 + \cdots + \binom{n-1}{r-1}\Delta^r y_1.$$

Heft 1513	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung
der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.
—— Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas. ——

Heft 8

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist

Die Addition der beiden Ausdrücke von y_n und $\triangle y_n$ würde geben:

$$y_{n+1} = y_1 + \left\{\binom{n-1}{1} + 1\right\}\triangle y_1 + \left\{\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}\right\}\triangle^2 y_1$$

$$+ \left\{\binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}\right\}\triangle^3 y_1 + \cdots + \left\{\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}\right\}\triangle^r y_1.$$

Nach Aufgabe 21 ist aber:

$$\binom{n-1}{1} + 1 = n;\ \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2},$$

$$\binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3} \cdots \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r};$$

hiemit würde folgen:

$$y_{n+1} = y_1 + \binom{n}{1}\triangle y_1 + \binom{n}{2}\triangle^2 y_1 + \binom{n}{3}\triangle^3 y_1 + \cdots + \binom{n}{r}\triangle^r y_1.$$

Diese letzte Formel zur Bestimmung des $n+1^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Gliedes würde also das gleiche Gesetz ausdrücken, welches für die Bestimmung des $n^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Gliedes bewiesen werden soll. Könnte man daher auf irgend eine Weise die Überzeugung finden, daß die zu beweisende Formel für irgend ein Glied den richtigen Wert hat, so müßte sie auch den richtigen Wert des folgenden, und somit auch den des dann folgenden, und also für den jedes folgenden liefern. Sie gibt aber für $n = 2$ als zweites Glied $y_2 = y_1 + \triangle y_1$, also den wirklichen Wert des $2^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Gliedes; deshalb gilt die Formel auch für das dritte, folglich auch für das vierte usw., daher für jedes zu bestimmende Glied y_n.

Frage 96. Welche Folgerungen knüpfen sich an die vorige Formel?

Erkl. 51. Nach Frage 60 ist für eine Reihe I. Ordnung:

$$y_n = an + b,$$

nach Frage 70 für eine Reihe II. Ordnung:

$$y_n = an^2 + bn + c,$$

Antwort. Ordnen wir die rechte Seite nach Potenzen von n, so erhalten wir einen Ausdruck $r^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Grades von der Form

$$y_n = an^r + bn^{r-1} + cn^{r-2} + \cdots + pn + q \ldots \text{№ } 34$$

und nach Frage 82 für eine Reihe III. Ordnung

$$y_n = an^3 + bn^2 + cn + d,$$

worin a, b, c, d die an den betreffenden Stellen angegebenen Werte besitzen.

Erkl. 52. Beim Ordnen nach Potenzen von n wird man damit beginnen, daß man die Ausdrücke $\binom{n-1}{r}$, $\binom{n-1}{r-1}$ usw. ausrechnet. Da

$$\binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{r!}$$

ist, sieht man leicht ein, daß beim Ausmultiplizieren das Glied $\frac{n^r}{r!}$ auftritt; die folgenden Glieder enthalten die Größe n nur noch auf den niedrigeren Potenzen n^{r-1}, n^{r-2} usw. Das Gleiche gilt von den Gliedern, welche bei der Ausrechnung von $\binom{n-r}{r-1}$, $\binom{n-r}{r-2}$ u. s. w. erhalten werden. Man erhält hienach beim Zusammenfammenfassen einen Ausdruck, dessen einzelne Glieder der Reihe nach die Potenzen n^r, n^{r-1}, n^{r-2} usw. enthalten; bezeichnen wir deren Koeffizienten mit a, b, c . . ., so erhalten wir schliesslich

$$an^r + bn^{r-1} + \cdots + pn + q.$$

in welchem die Koeffizienten a, b, c . . ., p und q aus den Größen y_1, $\triangle y_1$. $\triangle^2 y_1 \ldots \triangle^r y_1$ zusammengesetzte Ausdrücke darstellen, also für die nämliche Reihe r^{ter} Ordnung als konstante Größen zu betrachten sind; wir schließen daraus auf den **Satz: Das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe r^{ter} Ordnung läßt sich in der Form einer ganzen Funktion r^{ten} Grades des Stellenzeigers n darstellen.**

Da ein solcher Ausdruck $r+1$ Glieder und ebensoviel konstante Größen a, b, $c \ldots p$, q enthält, so folgt, daß irgend welche $r+1$ Glieder der Hauptreihe mit ihren Stellenzeigern die Reihe bestimmen; denn sie liefern $r+1$ Gleichungen, durch welche die Größen a, b, $c \ldots p$, q gefunden werden können.

Frage 97. Gilt auch die Umkehrung des vorigen Satzes?

Antwort. Es läßt sich der **Satz** beweisen: **Setzt man in einer ganzen Funktion r^{ten} Grades:**

$$y = ax^r + bx^{r-1} + cx^{r-2} + \cdots + px + q$$

für die veränderliche Größe x der Reihe nach die ganzen Zahlen 1, 2, 3, . . . n, $n+1$ usw., so bilden die hiedurch für y erhaltenen Werte y_1, y_2, y_3 . . . y_n, y_{n+1} usw. eine arithmetische Reihe r^{ter} Ordnung, deren r^{te} Differenz $\triangle^r y_1 = a.r!$ ist.

Beweis. Wählen wir die unabhängig veränderliche Größe x gleich der ganzen Zahl n, so erhalten wir den Wert:

$$y_n = an^r + bn^{r-1} + cn^{r-2} + \cdots + pn + q.$$

Frkl. 53. Wenn in der ganzen Funktion des r^{ten} Grades:

$$y = ax^r + bx^{r-1} + \cdots + px + q$$

die unabhängige Veränderliche x als sich stetig ändert gedacht wird, so läßt sich der Verlauf dieser Funktion graphisch darstellen. Indem man, wie dies in der analytischen Geometrie geschieht, zusammengehörige Werte von x und y als Coordinaten eines rechtwinkligen Systems wählt, fallen die Endpunkte der Ordinaten y in eine Parabel der r^{ten} Ordnung. Greift man die Abszissen $x = 1, 2, 3, 4 \ldots$ usw. heraus — oder anders ausgedrückt — läßt man x sich nicht stetig ändern, sondern sprungweise um je eine Einheit wachsen, so ergeben die Endpunkte der betreffenden Ordinaten y_1, y_2, y_3 usw. auf der Parabel r^{ter} Ordnung eine Punktreihe P_1, P_2, P_3 . . . als Bild der arithmetischen Reihe r^{ter} Ordnung.

In gleicher Weise liefert $x = n + 1$:

$$y_{n+1} = a(n+1)^r + b(n+1)^{r-1} + c(n+1)^{r-2} + \cdots + p(n+1) + q.$$

Durch Subtraktion folgt:

$$\triangle y_n = y_{n+1} - y_n = a(n+1)^r + b(n+1)^{r-1} + \cdots + p(n+1)$$
$$+ q - \{ an^r + bn^{r-1} + \cdots + pn + q \}$$

Da aber nach dem binomischen Lehrsatz

$$(n+1)^r = n^r + rn^{r-1} + \binom{r}{2} n^{r-2} + \cdots + \binom{r}{r-1} n + 1$$

ist, so wird:

$$\triangle y_n = ran^{r-1} + b_1 n^{r-2} + c_1 n^{r-3} + \cdots + p_1 n + q_1.$$

Erkl. 54. Aus

$$y = ax^r + bx^{r-1} + \cdots + px + q$$

erhielten wir:

$$\triangle y = rax^{r-1} + b_1 x^{r-2} + \cdots + p_1 x + q_1.$$

Dabei hat das höchste Glied rax^{r-1} den Koeffizienten ra, d. h. er ist gleich dem Produkt des Koeffizienten a der Funktion für y der Hauptreihe und dem höchsten Exponenten r, welchen x in dieser Funktion hat; ferner ist zu beachten, daß in dieser neuen Funktion von $\triangle y$ das höchste Glied rax^{r-1} die veränderliche Größe x nur noch auf der Potenz $r-1$ enthält; es hat sich also die Potenz um eine Einheit verringert. Da dieses Gesetz auch gelten muß beim Übergang von der ersten Differenzenreihe zur zweiten, so folgt, daß das höchste Glied in der ganzen Funktion $r - 2^{\text{ten}}$ Grades, welche $\triangle^2 y$ ausdrückt, heißen muß:

$$r(r-1)ax^{r-2} \text{ usw.}$$

Die hier auf das höchste Glied ran^{r-1} folgenden niedrigeren Glieder $b_1 n^{r-2}$ usw. brauchen wir für die Beweisführung nicht zu kennen, indem sie, weil zuerst herausfallend, auf die fragliche letzte Differenzenreihe keinen Einfluß haben können.

Der eben gefundene Ausdruck für $\triangle y_n$ sagt uns, daß die Glieder der ersten Differenzenreihe die Werte sind, welche wir aus der ganzen Funktion $r - 1^{\text{ten}}$ Grades

$$\triangle y = rax^{r-1} + b_1 x^{r-2} + \cdots$$
$$+ p_1 x + q_1$$

erhalten für $x = 1, 2, 3, 4 \ldots$ usw. Mithin ergeben sich die Glieder der zweiten Differenzenreihe nach dem gleichen Gesetz aus:

$$\triangle^2 y = r(r-1)ax^{r-2} + b_2 x^{r-3} + \cdots + q_2;$$

ferner wird:

$$\triangle^3 y = r(r-1)(r-2)ax^{r-3} + b_3 x^{r-4} + \cdots + q_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\triangle^{r-1} y = r(r-1)(r-2)\cdots 4.3.2.ax + q_{r-1}.$$

Für $x = n$ folgt hier:

$$\triangle^{r-1} y_n = r!\, an + q_{r-1}$$

und für $x = n + 1$:

$$\triangle^{r-1} y_{n+1} = r!\, a(n+1) + q_{r-1};$$

somit wird:

$$\triangle^r y_n = \triangle^{r-1} y_{n+1} - \triangle^{r-1} y_n,$$

also: $$\triangle^r y_n = r!\,a \quad \ldots\ldots \text{№ } 35$$

Da nun dieses allgemeine Glied für die $r^{\underline{\underline{te}}}$ Differenzenreihe kein n mehr enthält, so müssen alle Glieder der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Reihe $= r!\,a$ sein; d. h. die Hauptreihe ist von der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Ordnung.

Aufgabe 178. Zu beweisen, daß die $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Potenzen der Reihe der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung bilden, wobei die Glieder der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Differenzenreihe $= r!$ sind.

Erkl. 55. Daß die Reihe der Quadratzahlen n^2, also 1, 4, 9, 16 ... eine Reihe II. Ordnung bilden, ist schon in Frage 65 gezeigt worden.

Die Reihe der Kubikzahlen n^3, also 1, 8, 27 ... hat sich als eine solche III. Ordnung erwiesen in Frage 76.

Unser Satz sagt nun, daß $1^4, 2^4, 3^4 \ldots$ eine Reihe IV. Ordnung gibt, wie $1^5, 2^5, 3^5 \ldots$ usw. solche V. Ordnung usw.

Auflösung. Hier handelt es sich um die Zahlen:

$$y_1 = 1^r,\ y_2 = 2^r,\ y_3 = 3^r \cdots y_n = n^r.$$

Vergleichen dies mit:

$$y_n = an^r + bn^{r-1} + \cdots + pn + q,$$

so ist $a = 1$; mit Ausnahme des höchsten Gliedes n^r verschwinden alle folgenden Glieder, weil ihre Koeffizienten $b, c \ldots$ den Wert null haben. Da hienach die Zahlen y_1, y_2, y_3 usw. aus der Funktion $y = x^r$, erhalten werden, indem man $x = 1$, 2, 3 usw. einsetzt, müssen sie nach dem vorigen Satz eine Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung bilden mit den $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Differenzen $\triangle^r y = r!$

Hiebei stellt r irgend eine ganze Zahl vor, z. B. 9; daher ist 1^9, 2^9, $3^9 \ldots$ eine Reihe $9^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung mit den $9^{\underline{\underline{ten}}}$ Differenzen $9!$

Aufgabe 179. Zu beweisen, daß die $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Potenzen der Glieder einer jeden arithmetischen Reihe erster Ordnung eine arithmetische Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung bilden.

Erkl. 56. Nimmt man die Reihe 1, 3, 5, 7 ..., so ist $1^2, 3^2, 5^2, 7^2$ eine Reihe II. Ordnung, $1^3, 3^3, 5^3, 7^3$ eine Reihe III. Ordnung usw.

Auflösung. Heißt die arithmetische Reihe I. Ordnung:

$$\eta_1,\ \eta_1 + \triangle\eta,\ \eta_1 + 2\triangle\eta,\ \ldots \eta_1 + (n-1)\triangle\eta$$

(Siehe Frage 59), so folgt daraus die neue Reihe:

$$y_1 = \eta_1,\ y_2 = (\eta_1 + \triangle\eta)^r,\quad y_3 = (\eta_1 + 2\triangle\eta)^r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

also $$y_n = \{\eta_1 + (n-1)\triangle\eta\}^r = \{\eta_1 - \triangle\eta + n\,.\,\triangle\eta\}^r.$$

Wird dieser Ausdruck nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, so folgt:

$$y_n = (\eta_1 - \triangle \eta)^r + r(\eta_1 - \triangle \eta)^{r-1} . (\triangle y) . n$$
$$+ \binom{r}{2} (\eta_1 - \triangle \eta)^{r-2} . (\triangle \eta)^2 . n^2 \cdots + (\triangle \eta)^r . n^r.$$

Es ergibt sich hienach das allgemeine Glied y_n als ein Ausdruck $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Grades der Stellenzahl n; somit muß nach obigem Satz die Reihe $y_1, y_2 \ldots$ von der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Ordnung sein.

Aufgabe 180. Beweise den Satz: Verbindet man die gleichstelligen Glieder zweier arithmetischer Reihen in gleicher Weise durch Addition oder Subtraktion, so entsteht eine neue arithmetische Reihe, deren Ordnung gleich derjenigen der höhern der beiden verbundenen Reihen ist.

Erkl. 57. Nimmt man die Reihen:

1, 6, 15, 28, 45, 66
2, 6, 11, 20, 36, 62

so folgt durch Addition die neue Reihe:

3, 12, 26, 48, 81, 128.

Die I. Reihe geht aus $\eta = 2x^2 - x$ und die II. Reihe aus

$$\zeta = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8x - 4$$

hervor; daher entspringt die III. Reihe aus:

$$y = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8x - 4\right) + (2x^2 - x)$$
$$= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 4$$

und muß daher wie die II. von der dritten Ordnung sein.

Auflösung. Die Reihe $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$ sei eine arithmetische Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung, deren $n^{\underline{\underline{tes}}}$ Glied η_n sich in der Form

$$\eta_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_r n^r$$

darstellen lasse. Ferner sei $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots$ eine andere arithmetische Reihe von der Ordnung s, deren $n^{\underline{\underline{tes}}}$ Glied ζ_n darstellbar sei durch

$$\zeta_n = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \cdots + b_s x^s,$$

wobei aber die ganze Zahl s höher sein soll als die vorige ganze Zahl r.

Nun bilden wir die neue Reihe:

$$y_1 = \eta_1 + \zeta_1;\ y_2 = \eta_2 + \zeta_2;$$
$$y_3 = \eta_3 + \zeta_3 \ldots;\ y_n = \eta_n + \zeta_n.$$

Dieses $n^{\underline{\underline{te}}}$ Glied y_n läßt sich aber offenbar ausdrücken durch:

$$y_n = \eta_n + \zeta_n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)n + (a_2 + b_2) . n^2 + \cdots$$
$$+ (a_r + b_r)n^r + b_{r+1} n^{r+1} + \cdots + b_s n^s.$$

Da in diesem Ausdruck das letzte Glied $b_s n^s$ die höchste Potenz von n erhält, so muß nach obigem Satz die neue Reihe von der Ordnung s sein.

Aufgabe 181. Beweise den Satz: Multipliziert man die gleichstelligen Glieder zweier arithmetischer Reihen mit einander, so entsteht eine neue arithmetische Reihe, deren Ordnungszahlen gleich der Summe der Ordnungszahl der ursprünglichen Reihen ist.

Erkl. 58. Nimmt man die Reihen:

$$2,\ 9,\ 24,\ 47,\ 78\ \ldots \text{ und}$$
$$-2,\ 7,\ 34,\ 91,\ 190,$$

so gibt die gliedweise Multiplikation die neue Reihe

$$-4,\ 63,\ 816,\ 4277,\ 14820\ \ldots$$

Die I. Reihe geht hervor aus:

$$\eta = 4x^2 - 5x + 3,$$

die II. Reihe aus

$$\zeta = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5;$$

daher entspricht die III. Reihe der Funktion:

$$y = (2x^3 - 3x^2 + 4x - 5)(4x^2 - 5x + 3) \text{ oder}$$
$$y = 8x^5 - 22x^4 + 37x^3 - 49x^2 + 37x - 15.$$

für $x = 1, 2, 3 \ldots$; daher muß sie von der V. Ordnung sein.

Auflösung. Geht man wieder von den beiden vorigen Reihen $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$ und $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots$ aus und bildet daraus $y_1 = \eta_1 \cdot \zeta_1$, $y_2 = \eta_2 \cdot \zeta_2 \ldots . y_n = \eta_n \cdot \zeta_n$, so ist leicht zu zeigen, daß für y_n ein Ausdruck erhalten wird, dessen höchstes Glied die Potenz n^{r+s} enthält, woraus dann die Richtigkeit des Satzes folgt.

Frage 98. Wie läßt sich der Satz der Frage 97 noch verallgemeinern?

Antwort. Wir haben daselbst in eine ganze Funktion vom r^{ten} Grade:

$$y = ax^r + bx^{r-1} + \cdots = px + q$$

für x der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 ... eingesetzt und gezeigt, daß die hiedurch erhaltenen Zahlen $y_1, y_2, y_3 \ldots$ eine Reihe r^{ter} Ordnung gebildet haben.

Nun wollen wir eine **arithmetische Reihe I. Ordnung** aufstellen: $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, x_{n+1}$ usw.; dabei sei

$$x_2 = x_1 + \delta,\ x_3 = x_2 + 2\delta,$$
$$x_4 = x_1 + 3\delta \ldots x_n = x_1 + (n-1)\delta;$$
$$x_{n+1} = x_1 + n\delta$$

oder auch $x_{n+1} = x_n + \delta$ usw., so daß die **konstante Differenz** dieser Reihe den Wert δ hat.

Jetzt geben wir der veränderlichen Größe x in der ganzen Funktion $\underline{\underline{r^{ten}}}$ Grades:

$$y = ax^r + bx^{r-1} + \cdots + px + q$$

nach und nach die Werte x_1, x_2, $x_3 \ldots . x_n$; dadurch erhalten wir Größen, welche mit y_1, $y_2 \ldots . y_n$ usw. bezeichnet sein sollen. Von diesen läßt sich beweisen, daß sie auch eine Reihe $\underline{\underline{r^{ter}}}$ Ordnung bilden.

Wir haben nämlich:

$$y_n = ax_n^r + bx_n^{r-1} + cx_n^{r-1} + \cdots + px_n + q$$

und da $x_{n+1} = x_n + \delta$ ist, erhalten wir weiter:

$$y_{n+1} = a(x_n + \delta)^r + b(x_n + \delta)^{r-1} + c(x_n + \delta)^{r-2} + \cdots + p(x_n + \delta) + q.$$

Wie seither geht die erste Differenzenreihe $\triangle y_1$, $\triangle y_2 \ldots \triangle y_n$ usw. hervor aus

$$y_2 - y_1 = \triangle y_1;\ y_3 - y_2 = \triangle y_2 \ldots y_{n+1} - y_n = y_n$$

daher ist:

$$\begin{aligned}
\triangle y_n = y_{n+1} - y_n &= a\Big\{(x_n + \delta)^r - x_n^r\Big\} + b\Big\{(x_n + \delta)^{r-1} - x_n^{r-1}\Big\} \\
&\quad + c\Big\{(x_n + \delta)^{r-2} - x_n^{r-2}\Big\} + \cdots + p\Big\{x_n + \delta - x_n\Big\} \\
&= a\left\{\binom{r}{1}x_n^{r-1}\delta + \binom{r}{2}x_n^{r-2}\delta^2 + \cdots + \delta^r\right\} \\
&\quad + b\left\{\binom{r-1}{1}x_n^{r-2}\delta + \binom{r-1}{2}x_n^{r-3}\delta^2 + \cdots + \delta^{r-1}\right\} \\
&\quad + c\left\{\binom{r-2}{1}x_n^{r-3}\delta + \binom{r-2}{2}x_n^{r-4}\delta^2 + \cdots + \delta^{r-2}\right\} \\
&\quad + \cdots\cdots + p\delta.
\end{aligned}$$

Ordnen wir diesen Ausdruck nach Potenzen von x_n und bezeichnen die Koeffizienten, mit denen x_n^{r-2}, $x_n^{r-3} \ldots$ behaftet erscheinen, mit b_1, c_1, $d_1 \ldots$ usw., so folgt:

$$\triangle y_n = ar\delta x_n^{r-1} + b_1 x_n^{r-2} + c_1 x_n^{r-3} + \cdots + p_1 x_n + q_1.$$

Die rechte Seite sagt uns nun, daß die $n^{\underline{\underline{te}}}$ Differenz $\triangle y_n$ der ersten Differenzenreihe durch einen Ausdruck des $r-1^{\underline{\underline{ten}}}$ Gliedes der Größe x_n darstellbar ist, wie dies vom Glied y_n der Hauptreihe durch den obigen Ausdruck des $n^{\underline{\underline{ten}}}$ Grades der Fall ist; ferner sehen wir, daß der Koeffizient der höchsten Potenz $= ar\delta$, d. h. gleich dem Produkt aus dem Koeffizienten a, dem höchsten Exponenten r und der Differenz δ ist. Hieraus dürfen wir schließen, daß

$$\triangle^2 y_n = ar(r-1)\delta^2 x_n^{r-2} + b_2 x_n^{r-2} + \cdots + p_2 x_n + q_2$$

$$\triangle^3 y_n = ar(r-1)(r-2)\delta^3 x_n^{r-3} + b_3 x_n^{r-4} + \cdots + p_3 x_n + q_3$$

. . . .

$$\triangle^{r-1} y_n = ar(r-1)(r-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot \delta^{r-1} x_n + q_{r-1}$$

und

$$\triangle^r y_n = ar(r-1)(r-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \delta^r, \text{ also}$$

$$\triangle^r y_u = a\delta^r r!$$

ist, d. h. die Glieder der $n^{\underline{\underline{ten}}}$ Differenzenreihen sind konstant, nämlich $= a\delta^r r!$; somit ist bewiesen, daß unsere Reihe $y_1, y_2 \ldots . y_n$ wirklich von der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Ordnung und daß in der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Differenzenreihe jedes Glied $= a\delta^r$ ist.

Daraus fließt der **Satz:** **Jede Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung läßt sich dadurch entstanden denken, daß man in eine ganze Funktion $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Grades für die veränderliche Größe die Glieder einer arithmetischen Reihe I. Ordnung eingesetzt hat.**

Frage 99. Welche Folgerung läßt sich aus den vorigen Satz ziehen?

Erkl. 59. Da π hier, wie selbstverständlich, eine ganze Zahl bedeutet, so heißt dies: Man behalte in der gegebenen Reihe das erste Glied bei, lasse dann die folgenden $\pi - 1$ Glieder weg, nehme

Antwort. Nimmt man von einer Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung $z_1, z_2, z_3 \ldots z_\pi$, $z_{\pi+1}, \ldots\ldots z_{2\pi}, z_{2\pi+1}, \ldots\ldots z_{3\pi}$, $z_{3\pi+1} \ldots$ usw. die Glieder $z_1 = y_1$, $z_{\pi+1} = y_2$, $z_{2\pi+1} = y_3$ usw. heraus, so ist die neue Reihe $y_1, y_2, y_3 \ldots$ wieder von der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Ordnung.

dann das $\pi + 1^{\underline{\underline{te}}}$ Glied, lasse wieder die folgenden $\pi - 1$ Glieder weg, nehme wieder das folgende $2\pi + 1^{\underline{\underline{te}}}$ Glied usw., dann bilden die Zahlen z_1, $z_{\pi+1}$, $z_{2\pi+1}$ usw. auch eine Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung wie dies von der gegebenen Reihe zutrifft.

Denn wir können nach obigem Satz unsere gegebene Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung dadurch entstanden denken, daß wir in einem ganzen Ausdruck des $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Grades:

$$z = ax^r + bx^{r-1} + \cdots + px + q$$

für x der Reihe nach die Glieder einer Reihe I. Ordnung setzen:

$$x_1,\ x_1 + \delta,\ x_1 + 2\delta \ldots x_1 + (\pi - 1)\delta,$$
$$x_1 + \pi\delta,\ x_1 + (\pi + 1)\delta \ldots x_1 + (2\pi - 1)\delta,$$
$$x_1 + 2\pi\delta,\ x_1 + (2\pi + 1)\delta \ldots x_1 + (3\pi - 1)\delta,$$
$$x_1 + 3\pi\delta,\ x_1 + (3\pi + 1)\delta \ldots x_1 + (4\pi - 1)\delta,$$
$$x_1 + 4\pi\delta \text{ usw.}$$

Erkl. 60. Nehmen wir die Reihe II. Ordnung:

$$z_1 = 7,\ z_2 = 11,\ z_3 = 16,\ z_4 = 23,\ z_5 = 32,$$
$$z_6 = 43,\ z_7 = 56,\ z_8 = 71,\ z_9 = 88,\ z_{10} = 107..$$

so entspringt diese der Funktion:

$$z = x^2 + 7,$$

für $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots$

Nehmen wir jetzt:

$$x = 1, 4, 7, 10 \ldots,$$

so liefert uns die gleiche Funktion:

$$y = 7,\ y_2 = 23,\ y_3 = 56,\ y_4 = 107 \ldots$$

also die Glieder z_1, z_4, z_7, z_{10} der gegebenen Reihe.

Lassen wir also in dieser die Glieder $z_2, z_3, z_5, z_6, z_8, z_9 \ldots$ weg, so bilden die noch stehen bleibenden Glieder auch noch eine Reihe II. Ordnung.

Wir sehen daraus, daß unser Ausdruck des $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Grades die Zahlen $y_1, y_2, y_3 \ldots$ liefert, indem wir in ihm für x der Reihe nach die Werte setzen:

$$x_1,\ x_1 + \pi\delta,\ x_1 + 2\pi\delta,\ x_1 + 3\pi\delta\ ..,$$

d. h. die Glieder einer arithmetischen Reihe I. Ordnung mit der konstanten Differenz $\pi\delta$; nach dem obigen Satz muß die erhaltene Zahlnreihe $y_1, y_2 \ldots$ auch von der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Ordnung sein.

Die Glieder der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Differenzenreihe der gegebenen Reihe $z_1, z_2, z_3 \ldots$ haben nach den vorigen Ausführungen alle den Wert

$$\triangle^r z_1 = a\delta^r . r!,$$

in gleicher Weise folgt für die Glieder der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Differenzenreihe der Reihe:

$$y_1, y_2, y_3 \ldots$$

der Wert:

$$\triangle^r y = a(\pi\delta)^r . r!,$$

daher muß sein:

$$\triangle^r y_1 = \triangle^r z_1 . \pi^r.$$

Frage 100. Von einer Reihe $r^{\underline{\underline{ter}}}$ Ordnung sei gegeben das Anfangsglied y_1 der Hauptreihe, sowie Anfangsglieder:

$$\triangle y_1,\ \triangle^2 y_1 \ldots \triangle^r y_1$$

Antwort. Für eine Reihe I. Ordnung ist nach Formel 20

$$s = ny_1 + \binom{n}{2} \triangle y;$$

der r Differenzenreihen. Wie lautet der Ausdruck für die Summe s der n ersten Glieder

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n$$

der Hauptreihe?

für eine Reihe II. Ordnung ist nach Formel 24:

$$s = ny_1 + \binom{n}{2} \triangle y_1 + \binom{n}{3} \triangle^2 y_1$$

und für eine Reihe III. Ordnung ist nach Formel 28:

$$s = ny_1 + \binom{n}{2} \triangle y_1 + \binom{n}{3} \triangle^2 y_1 + \binom{n}{4} \triangle^3 y_1.$$

Hienach läßt sich vermuten, daß für eine Reihe IV. Ordnung erhalten wird:

$$s = ny_1 + \binom{n}{2} \triangle y_1 + \binom{}{3} \triangle^2 y_1 + \binom{n}{4} \triangle^3 y_1 + \binom{n}{5} \triangle^4 y_1;$$

in dieser Weise fortschließend, gelangen wir bei einer Reihe der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Ordnung zur Formel:

$$s = ny_1 + \binom{n}{2} \triangle y_1 + \binom{n}{3} \triangle^2 y_1 + \cdots + \binom{n}{r+1} \triangle^r y_1 \ldots \text{№ } 36.$$

Frage 101. Wie läßt sich die Richtigkeit dieser Formel beweisen?

Antwort. Wenn

$$s_n = ny_1 + \binom{n}{2} \triangle y_1 + \binom{n}{3} \triangle^2 y_1 + \cdots + \binom{n}{r+1} \triangle^r y_1$$

wirklich die Summe der n ersten Glieder Reihe darstellt und wir addieren dazu das $n + 1^{\underline{te}}$ Glied y_{n+1}, so muß der neue Ausdruck die Summe s_{n+1} der $n + 1^{\underline{\underline{ten}}}$ Glieder sein. — Nach Frage 94 ist nun:

$$y_{n+1} = y_1 + \binom{n}{1} \triangle y_1 + \binom{n}{2} \triangle^2 y_1 + \binom{n}{3} \triangle^3 y_1 + \cdots + \binom{n}{r} \triangle^r y_1$$

Hiemit erhalten wir:

$$s_n + y_{n+1} = (n+1) y_1 + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\} \triangle y_1 + \left\{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right\} \triangle^2 y_1 + \cdots$$
$$+ \left\{\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}\right\} \triangle^r y_1$$

Da aber nach Aufgabe 21:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2};$$

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\binom{n+1}{3}$$

. . . .

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$$

ist, so folgt:

$$s_n+y_{n+1}=(n+1)y_1+\binom{n+1}{2}\triangle y_1+\binom{n+1}{3}\triangle^2 y_1+\cdots+\binom{n+1}{r+1}\triangle^r y_1.$$

Dieser Ausdruck zeigt für $n+1$ den gleichen Bau wie der obige für n; d. h. ist s_n die Summe der n ersten Glieder, so gibt s_n+y_{n+1} die Summe s_{n+1} der $n+1$ ersten Glieder oder: gilt die obige Formel für die Zahl n, so gilt sie auch für die Zahl $n+1$.

Nun haben wir gesehen, daß sie für $n=3$ Geltung hat; somit ist sie auch richtig für $n=4$; weil sie für $n=4$ gilt, stimmt sie auch für $n=5$ usw. Hiemit ist die ist die allgemeine Giltigkeit unserer Formel erwiesen.

Aufgabe 182. Wie groß ist die **Summe** der 6 ersten Glieder der **Reihe** IV. Ordnung, in welcher

$y_1=4$, $\triangle y_1=2$, $\triangle^2 y_1=1$, $\triangle^3 y_1=5$ und $\triangle^4 y_1=3$?

Auflösung. Nach obiger Formel wird:

$$s=n.4+\binom{n}{2}2+\binom{n}{3}.1+\binom{n}{4}.5+\binom{n}{5}.3$$

Für $n=6$ gibt dies $s=167$.

Aufgabe 183. Wie groß ist die **Summe** der 10 ersten Glieder der **Reihe**: $-1, 0, 3, 9, 21, 47, 103\ldots$ **Vgl.** Aufgabe 175.

Auflösung. Da

$y_1=-1$, $\triangle y_1=1$, $\triangle^2 y_1=2$, $\triangle^3 y_1=1$, $\triangle^4 y_1=2$ und $\triangle^5 y_1=3$

ist, so folgt aus der Summenformel der Frage ..

$$s = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}1 + \binom{n}{3}2 + \binom{n}{4}1 + \binom{n}{5}2 + \binom{10}{6}3.$$

Nehmen wir $n = 10$, so erhalten wir für die Summe der 10 ersten Glieder:

$$s = 10 \cdot 1 + \binom{10}{2} + \binom{10}{3}2 + \binom{10}{4} + \binom{10}{5}2 + \binom{10}{6}3$$

$$= 10 + 45 + 240 + 210 + 504 + 630$$

$$= 1639.$$

Aufgabe 184. Wie groß ist die Summe der n ersten Biquadratzahlen, also:

$$s = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4?$$

Auflösung. Aus

$$y_1 = 1^4 = 1;\ y_2 = 2^4 = 16;$$
$$y_3 = 3^4 = 81;\ y_4 = 4^4 = 256;$$
$$y_5 = 5^5 = 625 \text{ usw.}$$

leiten wir ab:

$$\triangle y_1 = 15;\ \triangle^2 y_1 = 50;\ \triangle^3 y_1 = 60;$$
$$\triangle^4 y_1 = 24.$$

Hiemit gewinnen wir wegen:

$$s = n y_1 + \binom{n}{2} \triangle y_1 + \binom{n}{3} \triangle^2 y_1 + \binom{n}{4} \triangle^3 y_1 + \binom{n}{5} \triangle^4 y_1$$

$$s = n \cdot 1 + \frac{n^2 - n}{2} \cdot 15 + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} \cdot 50$$

$$+ \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{24} \cdot 60$$

$$+ \frac{n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 50n^2 + 24n}{120} \cdot 24$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

Aufgabe 185. Wie groß ist die Summe der n ersten Glieder der Reihe, deren allgemeines die Form $y_n = 2n^3 - n + 1$ hat?

Erkl. 61. Nach Aufgabe 2 ist die Summe der ganzen Zahlen von 1 bis n $= \frac{(n+1)\,n}{2}$ und nach Aufgabe 173 ist die Summe der n ersten Kubikzahlen

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

Auflösung. Hier ist:

$$y_1 = 2 \cdot 1^3 - 1 + 1$$
$$y_2 = 2 \cdot 2^3 - 2 + 1$$
$$y_3 = 2 \cdot 3^3 - 3 + 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = 2 \cdot n^3 - n + 1.$$

Daraus folgt:

$$s = 2(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) - (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (1 + 1 + \cdots + 1)$$
$$= 2\left\{\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right\} - \left\{\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right\} + n$$
$$= \frac{n^4}{2} + n^3 + \frac{n}{2}.$$

Frage 102. Welche Folgerung läßt sich aus der obigen Summenformel ableiten?

Antwort. Da

$$s = ny_1 + \binom{n}{2}\Delta y_1 + \cdots + \binom{n}{r+1}\Delta^r y_1$$

ist, so erhalten wir durch Ordnen dieses Ausdrucks nach Potenzen von n einen Ausdruck des $r+1^{\text{ten}}$ Grades von der Form:

$$s = \alpha n^{r+1} + \beta n^r + \gamma n^{r-1} + \delta n^{r-2} + \cdots + \varkappa n \ldots \text{№ } 37$$

in welchem die Koeffizienten α, β, γ, $\delta \ldots \varkappa$ aus den Größen y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1 \ldots \Delta^r y_1$ zusammengesetzte Ausdrücke sind, also Größen darstellen, welche für die nämliche Reihe r^{ter} Ordnung konstant sind; wir schließen hieraus auf den Satz:

Die Summe von n aufeinander folgenden Glieder einer Reihe r^{ter} Ordnung läßt sich in der Form einer ganzen Funktion des $r+1^{\text{ten}}$ Grades der Gliederzahl n darstellen.

Da unser Ausdruck $r+1$ Glieder und ebensoviel konstante Größen $\alpha, \beta \ldots \varkappa$ enthält, so folgt, daß irgendwelche $r+1$ Summen mit ihren Stellenzeigern die

Erkl. 62. Nach Frage 63 ist für eine Reihe I. Ordnung:

$$s = \alpha n^2 + \beta n;$$

nach Frage 74 hat man für eine Reihe II. Ordnung:

$$s = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n$$

und für eine Reihe III. Ordnung ist nach Frage 86

$$s = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \gamma n.$$

Erkl. 63. Beim Ordnen nach Potenzen von n sind die Ausdrücke $\binom{n}{r+1}$, $\binom{n}{r}$ usw. auszurechnen.

Da nun

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{r!}$$

ist, erscheinen im Zähler $r+1$ Faktoren, welche n enthalten, somit führt die Aus-

rechnung auf die Potenz von n^{r+1}; höhere Potenzen können nicht auftreten, aber selbstverständlich die niedrigeren n^r, n^{r+1} u. s. f. bis herunter zu n^1; das absolute Glied ist nicht vorhanden, weil n im ersten Glied ny_1 der Summenformel enthalten ist.

Reihe bestimmen; denn sie liefern $r+1$ Gleichungen, aus welchen sich die Werte $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varkappa$ befinden lassen; hiemit ist die Funktion für s bekannt; $n = 1, 2, 3 \ldots$ liefern dann s_1, s_2, s_3 usw. Endlich wird $y_1 = s_2 - s_1$; $y_2 = s_3 - s_2$ u. s. f.

Frage 103. Wie heißt die Umkehrung des vorigen Satzes?

Erkl. 64. Wir können auch $x = 0$, -1, -2 annehmen, und würden dadurch erhalten die Werte s_0, s_{-1}, s_{-2} u. s. f.; offenbar wird aber wegen des Fehlens des absoluten Gliedes $s_0 = 0$; daher bekommen wir bei der Bildung der ersten Differenzenreihe s_{-1}, s_0, s_1, s_2 . . . u. s. f.

$$y_1 = s_1 - s_0 = s_1 - 0 = y_1.$$

Erkl. 65. Die Theorie der arithmetischen Reihen höherer Ordnung wurde in voller Allgemeinheit ausgebildet von Newton, Jakob Bernouilli und Lagny (1722); letzterer hat auch die oben genannte Bezeichnung eingeführt.

Antwort. Wir können den Satz beweisen: Setzt man in einer ganzen Funktion $r+1^{\text{ten}}$ Grades

$$s = \alpha x^{r+1} + \beta x^r + \gamma x^{r-1} + \cdots + \varkappa x$$

für die veränderliche Größe x der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 . . . n, $n+1$ usw., so sind die hierdurch für s gewonnenen Werte s_1, s_2, $s_3 \ldots s_n$, s_{n+1} usw. die Summen von den 1, 2, 3 . . . n, $n+1$ usw. ersten Gliedern einer arithmetischen Reihe r^{ter} Ordnung.

Denn nach dem Satze der Frage 97 bilden die Zahlen s_1, s_2, s_3, $s_4 \ldots$ eine Reihe $r+1^{\text{ter}}$ Ordnung. Da aber $y_1 = s_1$, $y_2 = s_2 - s_1$, $y_3 = s_3 - s_2$ . . . . $y_n = s_n - s_{n-1}$ usw. ist, so bilden die Zahlen y_1, y_2, $y_3 \ldots y_n$ usw. die erste Differenzenreihe der Reihe s_1, s_2, $s_3 \ldots$ Letztere hat aber die Ordnung $r+1$, somit muß die erste Differenzenreihe, d. h. unsere Hauptreihe y_1, y_2, y_3 von der r^{ten} Ordnung sein.

---

5. Ungelöste Aufgaben über Arithmetischen Reihen höherer Ordnungen.

Aufgabe 186. Von einer Reihe II. Ordnung seien die drei aufeinander folgende Glieder -3, $+4$ und $+16$ gegeben; wie heißen die fünf folgenden, sowie die fünf vorhergehenden Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 187. Es sei gegeben $y_1 = +8$, $y_2 = -2$ und $y_3 = 11$; daraus die Glieder y_4 bis y_{10} zu finden?

Aufgabe 188. Von einer Reihe II. Ordnung sei gegeben das erste

Glied der Hauptreihe = 1, sowie die Anfangsglieder der beiden Differenzenreihen = − 2 und + 4; es soll daraus die Reihe gebildet werden.

Aufgabe 189. Es sei gegeben $y_1 = 1$, $\triangle y_1 = -2$ und $\triangle^2 y_1 = -4$. Wie heißen die 6 Glieder, welche auf y_1 folgen und jene 6, welche y_1 vorangehen?

Aufgabe 190. Wie heißt das 13te Glied, wenn $y_1 = 0$, $\triangle y_1 = -3$ und $\triangle^2 y_1 = 5$ ist?

Aufgabe 191. Welchen Wert hat y_{20}, wenn $y_1 = 5$, $y_2 = 13$ und $y_3 = 30$ ist?

Aufgabe 192. Wie heißt die Reihe, wenn $y_3 = 3$, $y_7 = 37$ und $y_{10} = 94$ ist?

Aufgabe 193. Welchen Wert hat y_{12}, wenn $y_4 = 9$, $y_8 = 35$ und $y_{11} = 65$ ist?

Aufgabe 194. Wie heißt in der Reihe 6, 13, 24 das zehnte Glied und die Summe der 10 ersten Glieder?

Aufgabe 195. Wie heißt in der Reihe 5, 10, 17 das allgemeine Glied und die Summenformel? Wie das 20te Glied und die Summe der 20 ersten Glieder?

Aufgabe 196. Ebenso von der Reihe 8, 10, 9 . . . für $n = 10$.

Aufgabe 197. In einer Reihe II. Ordnung sei $s_4 = 12$, $s_7 = 126$ und $s_9 = 297$. Wie heißt die Reihe?

Aufgabe 198. In einer Reihe II. Ordnung sei $y_3 = 8$, $y_7 = 68$ und $y_9 - y_2 = 115^8/_9$. Wie heißt die Reihe?

Aufgabe 199. In einer Reihe II. Ordnung sei

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = +2,\ y_8 = 88$$
$$\text{und } y_9 + y_{10} = 257.$$

Wie heißt die Reihe?

Aufgabe 200. Von einer Reihe III. Ordnung kennt man die 4 aufeinander folgenden Glieder − 2, + 3, + 6 und + 5; dieselbe nach vorwärts und rückwärts fortzusetzen mit je fünf Gliedern.

Aufgabe 201. Wie heißt die Reihe, in welcher $y_1 = -8$, $\triangle y_1 = 3$, $\triangle^2 y_1 = -5$ und $\triangle^3 y_1 = 1$ ist?

Aufgabe 202. Wie lautet das 10te Glied der Reihe, in welcher $y_1 = 2$, $\triangle y_1 = -1$, $\triangle^2 y_1 = +4$ und $\triangle^3 y_1 = +3$ ist?

Aufgabe 203. Wie heißt das 50te Glied der Reihe, in welcher $y_1 = 0{,}7$, $\triangle y_1 = -0{,}3$, $\triangle^2 y_1 = +0{,}2$ und $\triangle^3 y_1 = 0{,}05$ ist?

Aufgabe 204. Wie lautet die III. Ordnung, in welcher $y_3 = 11$, $y_6 = 57$, $y_8 = 161$ und $y_{11} = 509$ ist?

Aufgabe 205. Wie groß ist in der Reihe − 2, − 1, 3, 9 . . . die Summe der 15 ersten Glieder?

Aufgabe 206. Wie groß ist in der Reihe, in welcher

$$y_1 = +3,\ \triangle y_1 = -4,\ \triangle^2 y_1 = 10$$
$$\text{und } \triangle^3 y_1 = -23$$

das siebente Glied und die Summe der sieben ersten Glieder?

Aufgabe 207. Wie heißt das allgemeine Glied und die Summenformel der Reihe, in welcher

$$y_1 + y_2 + y_3 = 42;\ y_5 - y_6 = 43;$$
$$y_4 + y_8 = -326 \text{ und } y_7 = -147 \text{ ist?}$$

Aufgabe 208. Wie groß ist in der Reihe − 1, 0, 3, 9, 20, 47 die Größe $\triangle^3 y_6$?

Antwort 209. Welchen Wert hat in der Reihe 1, − 1, 0, 3, 8, 18 . . die Größe $\triangle^4 y_5$?

Aufgabe 210. Beweise, daß sich die Ordnung einer Reihe nicht ändert, wenn alle Glieder mit der nämlichen Zahl multipliziert werden.

Aufgabe 211. Gieb 10 aufeinander folgende Glieder der Reihe an, deren allgemeines Glied

$$y_n = 4n^2 - 5n + 4.$$

Aufgabe 212. Ebenso, wenn

$$y_n = \frac{1}{2}n^3 - 4n^2 + 5n - 9.$$

Aufgabe 213. Ebenso, wenn

$$y_n = \frac{1}{5}n^4 - 4n^2.$$

Aufgabe 214. Wie heißt das allgemeine Glied der Reihe

2, 5, 51, 152?

Aufgabe 215. Wie heißt das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 13,\ 73\frac{5}{6},\ 243?$$

Aufgabe 216. Wie heißt das allgemeine Glied der Reihe

9, 36, 81, 144?

Aufgabe 217. Wie heißt das allgemeine Glied der Reihe

0,001, 0,0008, 0,0027?

Aufgabe 218. Beweise, daß wenn jedes Glied einer Reihe r^{ter} Ordnung mit der Zahl s potenziert wird, eine neue Reihe von der Ordnung rs auftritt.

Aufgabe 219. Bilde aus der Reihe 1, 4, 9, 16... und der Reihe 3, 5, 7, 9... durch Subtraktion eine neue Reihe und beweise, daß sie zweiter Ordnung ist.

Aufgabe 220. Bilde aus der Reihe 5, 3, 9, 23... und der Reihe 1, 7, 5, 3... durch gliedweise Multiplikation eine neue Reihe und bestimme ihr allgemeines Glied.

Aufgabe 221. Es soll durch gliedweise Multiplikation aus den beiden Reihen mit den allgemeinen Gliedern $2x^2 + 5$ und $3x^3 \cdot 4x$ eine neue Reihe gebildet werden; wie heißt ihr allgemeines Glied, und wie 5 aufeinander folgende Glieder?

Aufgabe 222. Es soll in dem Ausdruck $3x - 2$ für x der Reihe nach die Glieder 4, 6, 8, 10... der Reihe I. Ordnung gesetzt werden; beweise, daß wieder eine I. Ordnung entsteht; suche die Differenz derselben, ihr 9tes Glied und die Summe der 9 ersten Glieder.

Aufgabe 223. Es soll in dem Ausdruck $5x - 4$ für x die Glieder 2, 3, 7, 14 einer Reihe II. Ordnung eingesetzt werden; von welcher Ordnung ist die entstehende Reihe und wie heisst ihr allgemeines Glied?

Aufgabe 224. Welches Ergebnis stellt sich ein, wenn man in den vorigen Aufgaben den Ausdruck $3x^2 - 4x + 5$ zum Einsetzen benützt?

Aufgabe 225. Beweise, dass beim Einsetzen des Gliedes einer Reihe III. Ordnung in den Ausdruck $ax^2 + bx + c$ eine Reihe VI. Ordnung entsteht.

Aufgabe 226. Wie heisst die Verallgemeinerung des vorigen Satzes?

Aufgabe 227. Wie gross ist die Summe der 10 ersten Glieder der Reihe IV. Ordnung, in welcher $y_1 = -1$; $\triangle y_1 = +2$; $\triangle^2 y_1 = -4$; $\triangle^3 y_1 = +4$ und $\triangle^4 y_1 = -1$?

Aufgabe 228. Berechne s_8 der Reihe V. Ordnung, in welcher:

$$y_1 = \frac{1}{2},\ \triangle y_1 = +1,\ \triangle^2 y_1 = -1{,}5;$$
$$\triangle^3 y_1 = +2,\ \triangle^4 y_1 = -1 \text{ und}$$
$$\triangle^5 y_1 = +1\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 229. Ebenso s_{15} der Reihe:

1, −1, 0, 3, 8, 18, 41...

Math 26..

Heft 1517	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Heft 9

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist

Aufgabe 230. Wie heisst die Summenformel der Reihe mit dem allgemeinen Glied $y = 2x^3 - x + 1$?

Aufgabe 231. Wie gross ist die Summe der n ersten Glieder der Reihe, deren allgemeines Glied

$y = x^4 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{3}$ ist? ($n = 1, 2 \ldots 10$)

Aufgabe 232. Ebenso, wenn
$$y = 0{,}9x^2?$$

Aufgabe 233. Ebenso, wenn
$$y = \frac{x^3}{1000}.$$

Aufgabe 234. Ebenso, wenn
$$y = 0{,}5\,x^4?$$

Aufgabe 235. Wie groß ist die Summe $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5$?

Aufgabe 236. Wie groß ist die Summe $1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots + n^6$?

IV. Über Summenreihen und figurierte Zahlen.

I. Die Summenreihen.

Frage 104. Es sei $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$ eine beliebige arithmetische Reihe von der $r^{\underline{\underline{ten}}}$ Ordnung. Wie bildet man aus ihr die I. Summenreihe?

Antwort. Bilden wir aus der Hauptreihe $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$ die neue Reihe:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= y_1 + y_2 \\ z_3 &= y_1 + y_2 + y_3 \\ z_4 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so heißt $z_1, z_2, z_3, z_4 \ldots$ die erste Summenreihe der gegebenen Reihe. Heißt letztere

$$-1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 9,\ 19,$$

so sind die Glieder der Summenreihe

$$z_1 = -1, \quad z_2 = -1 + 3 = 2,$$
$$z_3 = -1 + 3 + 4 = 6,$$
$$z_4 = -1 + 3 + 4 + 5 = 11 \text{ usw.}$$

Hienach ist das erste Glied der I. Summenreihe gleich dem ersten Glied der Hauptreihe und das $n^{\underline{\underline{te}}}$ Glied der Summenreihe gleich der Summe der ersten n Glieder der Hauptreihe.

Frage 105. Wie bildet man aus der obigen Hauptreihe $y_1, y_2, y_3 \ldots$ die zweite Summenreihe? Wie die dritte usw.?

Antwort. Die II. Summenreihe der Hauptreihe geht aus der I. Summenreihe hervor, wie die

letztere aus der Hauptreihe. Ist aus den Gliedern der Hauptreihe $y_1, y_2, y_3 \ldots$ die erste Summenreihe $z_1, z_2, z_3 \ldots$ gebildet, so sind:

$$u_1 = z_1$$
$$u_2 = z_1 + z_2$$
$$u_3 = z_1 + z_2 + z_3$$
$$u_4 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die Glieder der II. Summenreihe.

Wir sehen: Das erste Glied der II. Summenreihe stimmt überein mit dem ersten Glied der I. Summenreihe und das n^{te} Glied der II. Summenreihe ist gleich der Summe der ersten n Glieder der I. Summenreihe.

Aus obigem Beispiel leiten wir ab:

$$u_1 = -1$$
$$u_1 = -1 + 2 = +1$$
$$u_3 = -1 + 2 + 6 = 7$$
$$u_4 = -1 + 2 + 6 + 11 = 18$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

als II. Summenreihe der Hauptreihe $-1, 3, 4, 5 \ldots$ usw.

Das gleiche Verfahren dient nun dazu aus der II. Summenreihe die dritte zu bilden. Nehmen wir:

$$v_1 = u_1$$
$$v_2 = u_1 + u_2$$
$$v_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so sind $v_1, v_2, v_3 \ldots$ die Glieder der dritten Summenreihe usw. Auf obigen Fall angewendet, folgt:

$$v_1 = -1$$
$$v_2 = -1 + 1 = 0$$
$$v_3 = -1 + 1 + 7 = 7$$
$$v_4 = -1 + 1 + 7 + 18 = 25$$

u. s. f.

Aufgabe 240. Desgleichen in Aufgabe 238.

Auflösung. In Aufgabe 238 lautet die Hauptreihe 4, 1, 3, 10 . . .; sie gehört der II. Ordnung an, somit erhöht sich die Ordnung bei den Summenreihen je um eine Einheit, also auf 3, 4 und 5.

---

2. Von den figurierten Zahlen.

a) Polygonalzahlen.

Frage 108. Was sind figurierte Zahlen?

Antwort. Figurierte Zahlen heißen die Glieder arithmetischer Reihen aller Ordnungen, deren erstes Glied die Einheit ist, und in deren letzten Differenzenreihen eine positive ganze Zahl wiederkehrt. Z. B.:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5\ldots$$

$$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15\ldots$$

$$1,\quad 4,\quad 9,\quad 16,\quad 25\ldots$$

$$1,\quad 5,\quad 12,\quad 22,\quad 35\ldots$$

$$1,\quad 6,\quad 18,\quad 40,\quad 75\ldots$$

Frage 109. Welche figurierte Zahlen heißen Polygonalzahlen?

Antwort. Unter der Voraussetzung, daß die Zahl d ganz und positiv sei, bilden wir die Reihe I. Ordnung:

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 1 + d$$

$$y_3 = 1 + 2d$$

$$y_4 = 1 + 3d$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = 1 + (n-1)d.$$

Aus dieser schreiten wir zur Bildung der ersten Summenreihe:

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = 2 + d$$
$$z_3 = 3 + 3d$$
$$z_4 = 4 + 6d$$
$$z_5 = 5 + 10d$$
$$\cdots\cdots$$

Diese Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 .... werden Polygonalzahlen genannt.

Frage 110. Wie werden die Polygonalzahlen eingeteilt.

Antwort. Gibt man der Zahl d den Wert 1, so erhält man die Dreieckszahlen oder Trigonalzahlen: $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, $z_3 = 6$, $z_4 = 10$, $z_5 = 15$ usw.

Wird $d = 2$ gesetzt, so folgen die Quadratzahlen oder Tetragonalzahlen: $z_1 = 1$, $z_2 = 4$, $z_3 = 9$, $z_4 = 16$, $z_5 = 25$ usw.

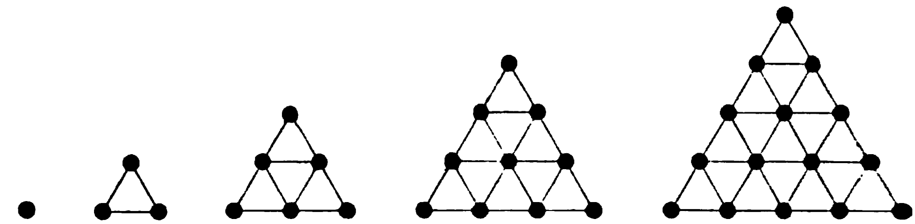
$d = 3$ angenommen ergibt die Fünfeckszahlen oder Pentagonalzahlen: $z_1 = 1$, $z_2 = 5$, $z_3 = 12$, $z_4 = 22$, $z_5 = 35$ usw.

Wenn $d = 4$ gewählt wird, so folgen die Sechseckszahlen oder Hexagonalzahlen: $z_1 = 1$, $z_2 = 6$, $z_3 = 15$, $z_4 = 28$, $z_5 = 45$ usw. In dieser Weise kann weiter gemacht werden.

Frage 111. Warum haben diese Zahlen die genannten Bezeichnungen erhalten?

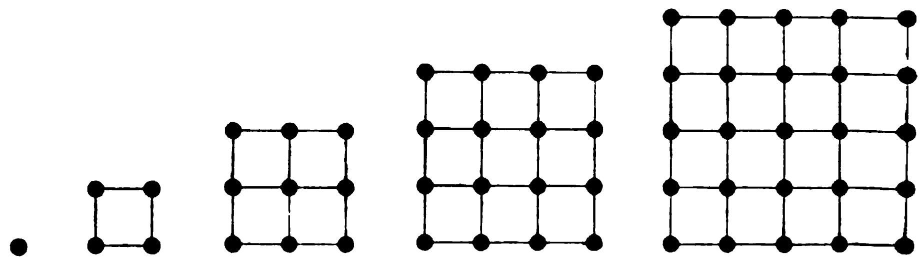
Antwort. Von den Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21 ... ausgehend, denken wir uns die Einheiten jedes einzelnen Gliedes durch Punkte oder durch Kugeln dargestellt; dann können wir mit den Punkten oder Kugeln jedesmal ei

regelmäßiges Dreieck zusammenstellen in folgender Weise:



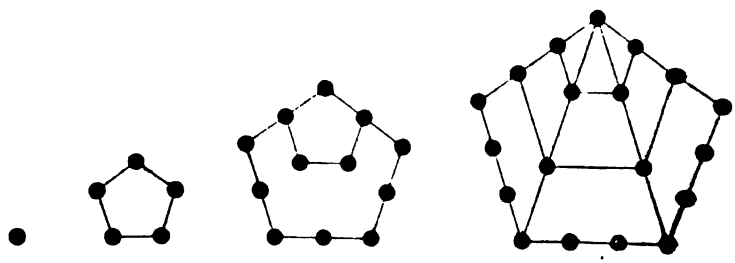
$z_1 = 1$ $z_2 = 3$ $z_3 = 6$ $z_4 = 10$ $z_5 = 15$

Mit den Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25... verknüpfen wir die Vorstellung von 1 Kugel, 4 Kugeln, 9 Kugeln usw. Dann können wir jede einzelne dieser Gruppen zur Ausfüllung eines Quadrates verwenden in folgender Art:



$z_1 = 1$ $z_2 = 4$ $z_3 = 9$ $z_4 = 16$ $z_5 = 25$

Die Anzahl der Kugeln, welche wir aus den Gliedern der Fünfeckszahlen erhalten, genügen zur Füllung eines regelmäßigen Fünfecks, wobei die Kugeln auf die Seiten der verschiedenen perspektivisch liegenden Fünfecke mit einem gemeinsamen Scheitel zu liegen kommen, wie dies folgende Figuren zeigen:



$z_1 = 1$ $z_2 = 5$ $z_3 = 12$ $z_4 = 22$

Erkl. 66. Der Leser möge sich auch die Zeichnungen entwerfen, welche den Sechseckszahlen, Siebeneckszahlen usw. entsprechen.

In der soeben dargelegten Weise kann mit den Kugeln, welche den Gliedern der Sechseckszahlen entsprechen, ein regelmäßiges Sechseck gefüllt werden usw.

Hiemit ist die Bezeichnung unserer Zahlen als Vieleckszahlen oder Polygonalzahlen gerechtfertigt.

Frage 112. Wie heißt das allgemeine Glied der Vieleckszahlen?

Antwort. Diese Zahlen heißen in der allgemeinen Form:

$$z_1 = 1,\quad z_2 = 2 + d,\quad z_3 = 3 + 3d,$$
$$z_4 = 4 + 6d \text{ usw.},$$

sie bilden nach ihrer Herleitung eine arithmetische Reihe II. Ordnung; nennen wir ihre Differenzen $\triangle z$ und ihre II. Differenzen $\triangle^2 z$, so folgt:

$$\begin{array}{lll}
z_1 = 1 & & \\
z_2 = 2 + d & \triangle z_1 = 1 + d & \\
z_3 = 3 + 3d & \triangle z_2 = 1 + 2d & \triangle^2 z_1 = d \\
z_4 = 4 + 6d & \triangle z_3 = 1 + 3d & \triangle^2 z_2 = d \\
z_5 = 5 + 10d & \triangle z_4 = 1 + 4d & \triangle^2 z_3 = d \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Erkl. 67. Es ist:

$$z_n = 1 + n - 1 + (n-1)d + \frac{(n-1)(n-2)}{2} d$$
$$= n + (n-1)d \left\{ 1 + \frac{n-2}{2} \right\}$$
$$= n + (n-1)d \cdot \frac{n}{2}$$
$$= \frac{n}{2} \left\{ 2 + (n-1)d \right\}$$

Wir haben also $z_1 = 1$, $\triangle z_1 = 1 + d$ $\triangle^2 z = d$; wenden wir nun hier die Formel an für das allgemeine Glied z_n einer Reihe II. Ordnung, so erhalten wir hieraus:

$$z_n = z_1 + (n-1)\triangle z_1 + \binom{n-1}{2}\triangle^2 z_1$$

$$z_n = 1 + (n-1)(1+d) + \binom{n-1}{2} d$$

oder

$$z_n = \frac{n}{2}\left\{2 + (n-1)d\right\}$$

Frage 113. Wie lauten hienach die allgemeinen Glieder der einzelnen Arten der Vieleckszahlen?

Antwort. Für die Dreieckszahlen ist $d = 1$, daher ist die n^{te} Dreieckszahl

$$= \frac{(n+1)n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Erkl. 68. $d = 1$ gibt:

$$z_n = \frac{n}{2}\left\{2 + (n-1)\right\} = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

$d = 2$ liefert:

$$z_n = \frac{n}{2}\left\{2 + (n-1)2\right\} = \frac{n}{2}\cdot 2n = n^2$$

$d = 3$ gesetzt, gibt:

$$z_n = \frac{n}{2}\left\{2 + (n-1)3\right\} = \frac{n}{2}\cdot(3n-1) \text{ usw.}$$

Für die **Quadratzahlen** ist $d = 2$, daher ist die n^{te} **Quadratzahl** $= n^2$.

Für die **Fünfeckszahlen** haben wir $d = 3$ zu nehmen und erhalten die n^{te} **Fünfeckszahl**

$$= \frac{n(3n-1)}{2} \text{ usw.}$$

Frage 114. Wie heißt das n^{te} Glied der m eckigen Polygonzahl?

Auflösung. Für die m eckige Polygonzahl müssen wir $d = m - 2$ setzen und erhalten hiemit für das allgemeine Glied z_n:

$$z_n = \frac{n}{2}\left\{2 + (n-1)(m-2)\right\} \text{ oder}$$

$$z_n = \frac{n}{2}\left\{4 - m - n(m-2)\right\} \ldots \text{ \textnumero } 38$$

Aufgabe 241. Wie heißen die 5 ersten Sechseckszahlen?

Auflösung. Für $m = 6$ gibt die vorige Formel für das allgemeine Glied der Sechseckszahlen:

$$z_n = \frac{n}{2}\left\{4 - 6 - n(6-2)\right\} = \frac{n}{2}\left\{4n - 2\right\} \text{ oder}$$

$$z_n = n(2n-1).$$

Nehmen wir $n = 1, 2, 3, 4, 5$, so erhalten wir die **Sechseckszahlen** 1, 6, 15, 28, 45.

Aufgabe 242. Wie heißt die 4^{te} Siebeneckszahl?

Auflösung. Für $m = 7$ und $n = 4$ giebt die obige Formel für die 4^{te} **Siebeneckszahl** den Wert:

$$\frac{4}{2}\left\{4 - 7 - 4(7-2)\right\} = 34.$$

Aufgabe 243. Wie heißen die 5 ersten m eckigen Vieleckszahlen?

Auflösung. Für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ erhalten wir aus der allgemeinen Formel für z_n:

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = m$$
$$z_3 = 3m - 3$$
$$z_4 = 6m - 8$$
$$z_5 = 10m - 15.$$

Frage 115. Wie groß ist die Summe der n ersten Dreieckszahlen?

Antwort. Die Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 15 ... bilden eine arithmetische Reihe II. Ordnung. Bilden wir ihre ersten Differenzen $\triangle z$ und ihre zweiten Differenzen $\triangle^2 z$, so erhalten wir:

$$\begin{array}{lll} z_1 = 1 & & \\ & \triangle z_1 = 2 & \\ z_2 = 3 & & \triangle^2 z_1 = 1 \\ & \triangle z_2 = 3 & \\ z_3 = 6 & & \triangle^2 z_2 = 1 \\ & \triangle z_3 = 4 & \ldots\ldots \\ z_4 = 10 & \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & & \end{array}$$

also ist $z_1 = 1$, $\triangle z_1 = 2$, $\triangle^2 z_1 = 1$. Die Formel für die Summe s der n ersten Glieder in einer Reihe II. Ordnung (siehe Frage 23) gibt hier:

$$s = n z_1 + \binom{n}{2} \triangle z_1 + \binom{n}{3} \triangle^2 z_1;$$

mit obigen Werten folgt:

$$s = n + \binom{n}{2} 2 + \binom{n}{3} = \binom{n+2}{3}$$

oder

$$s = \frac{n}{6}(n+1)(n+2).$$

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ... erhalten wir die Reihe 1, 4, 10, 20, 35 ..., sie ist selbstverständlich die I. Summenreihe der Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21 ... oder die II. Summenreihe der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5 usw.

Erkl. 69. Es ist:

$$n + \binom{n}{2} 2 + \binom{n}{3} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

Nun ist:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Siehe Aufgabe 21

Ebenso $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3}$ und

$\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \binom{n+2}{3}$; daher

$$n + \binom{n}{2} 2 + \binom{n}{3} = \binom{n+2}{3}.$$

Frage 116. Wie groß ist die Summe der n ersten Quadratzahlen?

Erkl. 70. Es ist:

$$n \cdot 1 + \binom{n}{2} 3 + \binom{n}{3} 2$$

$$= n + \frac{n(n-1)3}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$$

$$= \frac{n}{6}\left\{6 + (n-1)(9 + 2(n-2))\right\}$$

$$= \frac{n}{6}\left\{2n^2 + 3n + 1\right\} = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

Antwort. Aus der Reihe 1, 4, 9, 16... bilden wir:

$z_1 = 1$	$\Delta z_1 = 3$	$\Delta^2 z_1 = 2$
$z_2 = 4$	$\Delta z_2 = 5$	$\Delta^2 z_2 = 2$
$z_3 = 9$	$\Delta z_3 = 7$	.....
$z_4 = 16$	....	
....		

Mit $z_1 = 1$, $\Delta z_1 = 3$ und $\Delta^2 z_1$ gibt die obige Summenformel hier:

$$s = n \cdot 1 + \binom{n}{2} 3 + \binom{n}{3} 2$$

$$= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ folgt die Reihe 1, 5, 14, 30, 55... als I. Summenreihe der Quadratzahlen 1, 4, 9.. und als II. Summenreihe der Reihe 1, 3, 5, 7 usw.

Frage 117. Wie groß ist die Summe der n ersten Fünfeckszahlen?

Antwort. Aus $z_1 = 1$, $z_2 = 5$, $z_3 = 12$, $z_4 = 22$, $z_5 = 35$... leiten wir ab $\Delta z_1 = 4$ und $\Delta^2 z_1 = 3$ und erhalten nach dem vorigen Verfahren:

$$s = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.. folgt dann die Reihe 1, 6, 18, 40, 75... als I. Summenreihe von 1, 5, 12, 22, 35 und als II. Summenreihe von 1, 4, 7, 10, 13...

Frage 118. Wie groß ist die Summe der n ersten m eckigen Vieleckezahlen?

Antwort. Wir nehmen die Vieleckszahlen zuerst in der Form 1, $2 + d$, $3 + 3d$, $4 + 6d$.. und bilden

wieder die I. und die II. Differenzen ihrer Reihe:

$$\begin{array}{lll} z_1 = 1 & & \\ z_2 = 2 + d & \triangle z_1 = 1 + d & \triangle^2 z_1 = d \\ z_3 = 3 + 3d & \triangle z_1 = 1 + 2d & \triangle^2 z_2 = d \\ z_4 = 5 + 6d & \triangle z_2 = 1 + 3d & \triangle^2 z_2 = d \\ z_5 = 5 + 10d & \triangle z_2 = 1 + 4d & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \end{array}$$

Es ist hienach in der Summenformel für eine Reihe II. Ordnung einzusetzen $z_1 = 1$, $\triangle z_1 = 1 + d$ und $\triangle^2 z_1 = d$; diese Werte liefern, da

$$s = nz_1 + \binom{n}{2} \triangle z_1 + \binom{n}{3} \triangle^2 z_1 \text{ ist,}$$

$$s = n + \binom{n}{2}(1 + d) + \binom{n}{3} d.$$

Da aber die Zahl m der Ecken mit der Größe d verbunden ist durch die Gleichung:

$$d = m - 2,$$

so folgt durch Einsetzung dieses Wertes:

$$s = n + \binom{n}{2}(m - 1) + \binom{n}{3}(m - 2)$$

oder:

$$s = \frac{n(n+1)}{6}\left\{5 - m + n(m - 2\right\} \quad \text{№ } 39.$$

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots.$ folgt die Reihe:

$$1,\ m + 1,\ 4m - 2,\ 10m - 10,\ 20m - 25 \ldots;$$

dies ist die erste Summenreihe der Zahlen:

$$1,\ m,\ 3m - 3,\ 6m - 8,\ 10m - 15$$

der Aufgabe 243 oder die zweite Summenreihe von

$$1,\ m - 1,\ 2m - 3,\ 3m - 5,\ 4m - 7 \text{ usw.}$$

Erkl. 71. Es ist:

$$n + \binom{n}{2}(m-1) + \binom{n}{3}(m-2)$$

$$= n + \frac{n(n-1)(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(m-2)}{6}$$

$$= \frac{n}{6}\left\{6 + 3(n-1)(m-1) + (n-1)(n-2)(m-2)\right\}$$

$$= \frac{n}{6}\left\{5 - m - 2n + mn + n(5 - m - 2n + mn)\right\}$$

$$= \frac{n}{6}(n+1)(5 - m - 2n + mn)$$

$$= \frac{n}{6}(n+1)\left\{(5 - m + n(m-2)\right\}$$

Aufgabe 244. Wie groß ist die Summe der n ersten Sechseckszahlen?

Auflösung. Nehmen wir $m = 6$, so ergibt sich:

$$s = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

Für $n = 1, 2, 3, 4$ usw. folgt die Reihe 1, 7, 22, 50, 95 ... als I. Summenformel von:

1, 6, 15, 28, 45 ...

und als II. Summenformel von:

1, 5, 9, 13 usw.

---

b) Pyramidalzahlen.

Frage 119. Welche Zahlen heißen Pyramidalzahlen?

Antwort. Pyramidalzahlen heißen heißen die Glieder der ersten Summenreihen, welche aus den verschiedenen Reihen der Polygonalzahlen gebildet werden können, und zwar heißt die Summenreihe 1, 4, 10, 20 ... der Dreieckszahlen die Reihe der dreiseitigen Pyramidalzahlen, die Summenreihe 1, 5, 14, 30 ... der Quadratzahlen die Reihe der vierseitigen Pyramidalzahlen, die Summen- 1, 6, 18, 40 ... der Fünfeckszahlen die Reihe der fünfseitigen Pyramidalzahlen usw.

Frage 120. Wie läßt sich diese Bezeichnung begründen?

Antwort. Wenn wir uns in der Reihe der dreiseitigen Pyramidalzahlen jede Einheit wieder durch eine Kugel darstellen, so können wir diese Kugeln so übereinschichten, daß Pyramiden entstehen. deren Grundflächen regelmäßige Dreiecke bilden. So lassen sich 4 Kugeln so legen, daß 3 zur Bildung der Grundfläche Verwendung finden und die vierte auf das so hergestellte Dreieck in der Mitte aufgesetzt wird. Stehen 10 Kugeln zur Verfügung, so wählen wir 6 zur Bildung eines

gleichseitigen Dreiecks mit je drei Kugeln längs einer Seite; auf diese Grundfläche legen wir drei Kugeln und setzen die 10te auf diese zweite Schichte. Bei 25 Kugeln legen wir 10 als gleichseitiges Dreieck mit je 3 Kugeln längs jeder Seite auf den Boden und setzen auf dasselbe die aus den übrigen 10 Kugeln gebildete Pyramide usw. Bei den vierseitigen Pyramidalzahlen bildet die Basis ein Quadrat. So können wir, wenn 5 Kugeln gegeben sind, 4 derselben zu einem Quadrat verwenden und die fünfte auf dieses Quadrat in der Mitte aufsetzen. Bei 14 Kugeln dienen 9 zur Herstellung eines Quadrats mit je 3 Kugeln längs einer Seite; auf dieses Quadrat kommt dann die Pyramide aus den 5 andern usw.

Die fünfseitigen Pyramidalzahlen liefern mit 6, 18, 40... Kugeln Pyramiden, deren Grundflächen regelmäßige Fünfecke mit 1, 2, 3... Kugeln längs einer Seite u. s. f.

Frage 121. Welche Schlüsse lassen sich aus dieser Bilduugsweise der Pyramidalzahlen ziehen?

Antwort. Da die Polygonalzahlen die Glieder der I. Summenreihen von arithmetischen Reihen I. Ordnung sind, so müssen die Pyramidalzahlen als Glieder der I. Summenreihen der Polygonalzahlen die Glieder der II. Summenreihen der genannten Reihen I. Ordnung sein; daraus folgt, daß jede Reihe von Pyramidalzahlen eine arithmetische Reihe III. Ordnung ist.

Weiter ergibt sich, daß das allgemeine oder $n^{\underline{\underline{te}}}$ Glied der Polygonalzahlen anzeigt, wieviel Kugeln die $n^{\underline{\underline{te}}}$ Schichte der entsprechenden Kugelpyramide enthält, während die $n^{\underline{\underline{te}}}$ Pyramidenzahl die Anzahl aller

Erkl. 72. Zur näheren Erläuterung stellen wir die Zahlen zusammen:

	Dreieckszahl.	Dreiseit. Pyramidalzahl.
$n=1$	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
. . .	. . .	. . .

	Quadratzahl.	Vierseit. Pyramidalzahl.
$n=1$	1	1
2	4	5
3	9	14
4	16	30
5	25	55
. . .	. . .	. . .

	Fünfeckszahl.	Fünfseit. Pyramidalzahl.
$n=1$	1	1
2	5	6
3	12	18
4	22	40
5	35	75
	usw.	

Kugeln, welche in den n Schichten liegen, bestimmt. Nehmen wir z. B. die 4te Fünfeckszahl 22 und die 4te fünfseitige Pyramidenzahl 40, so hat die aus 40 Kugeln geformte Pyramide in der vierten Schichte, d. h. in der Grundfläche 22 Kugeln.

Endlich folgt, daß die Summe der $n-1$ten Pyramidalzahl und der $n$ten Polygonalzahl gleich der $n$ten Pyramidalzahl sein muß. Z. B. ist die 4te dreiseitige Pyramidalzahl $=20$, die 5te Dreieckszahl $=15$; die Summe $20+15=35$ gibt die 5te dreiseitige Pyramidalzahl.

Frage 122. Wie heißt das allgemeine Glied, wie die Summe der n ersten Glieder der dreiseititigen Pyramidalzahlen?

Antwort. Nach Frage 115 lautet das $n$te Glied der I. Summenreihe der Dreieckszahlen:

$$y_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

und diese Zahl ist nach unserer Erklärung die $n$te dreiseitige Pyramidalzahl. Um die Summe der n ersten Glieder zu erhalten, bilden wir von der entprechenden Reihe 1, 4, 10, 20, 35 ... die Differenzen und erhalten:

$$\begin{array}{llll}
y_1 = 1 & & & \\
 & \triangle y_1 = 3 & & \\
y_2 = 4 & & \triangle^2 y_1 = 3 & \\
 & \triangle y_2 = 6 & & \triangle^3 y_1 = 1 \\
y_3 = 10 & & \triangle^2 y_2 = 4 & \\
 & \triangle y_3 = 10 & & \triangle^3 y_2 = 1 \\
y_4 = 20 & & \triangle^3 y_3 = 5 & \dots \\
 & \triangle y_4 = 15 & \dots & \\
y_5 = 35 & \dots & & \\
\dots & & &
\end{array}$$

Hier ist also $y_1 = 1$, $\triangle y_1 = 3$; $\triangle^2 y_1 = 3$ und $\triangle^3 y_1 = 1$.

Nach Frage 86 ist:

$$s = n y_1 + \binom{n}{2} \triangle y_1 + \binom{n}{3} \triangle^2 y_1 + \binom{n}{4} \triangle^3 y_1$$

$$= \frac{\triangle^3 y_1}{24} n^4 + \left\{ \frac{\triangle^2 y_1}{6} - \frac{\triangle^3 y_1}{4} \right\} n^3$$

$$+ \left\{ \frac{\triangle y_1}{2} - \frac{\triangle^2 y_1}{2} + \frac{11 \triangle^3 y_1}{24} \right\} n^2$$

$$+ \left\{ y_1 - \frac{\triangle y_1}{2} + \frac{\triangle^2 y_1}{3} - \frac{\triangle^3 y_1}{4} \right\} n,$$

Erkl. 73. Es ist:

$$s = \frac{1}{24} n \left\{ n^3 + 6n^2 + 11n + 6 \right\}$$

$$= \frac{1}{24} n \left\{ n^3 + 5n^2 + 6n + n^2 + 5n + 6 \right\}$$

$$= \frac{1}{24} n (n+1)(n^2 + 5n + 6)$$

$$= \frac{1}{24} n (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$= \frac{n+3}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+1}{3} \cdot \frac{n}{4} = \binom{n+3}{4}$$

Farrar fund

Math. 2259

Bd. 10

Heft 1522	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Heft 10

Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz i

vereinfacht folgt:

$$s = \frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{4}n^3 + \frac{11}{24}n^2 + \frac{1}{4}n = \binom{n+3}{4}.$$

Aufgabe 245. Wie heißt die $12^{\underline{te}}$ dreiseitige Pyramidenzahl und wie groß ist die Summe der zwölf ersten dieser Zahlen?

Auflösung. Setzen wir in die zwei Ausdrücke der vorigen Frage $n = 12$ ein, so folgt die zwölfte dreiseitige Pyramidalzahl

$$= \frac{12 \cdot (12+1)(12+2)}{6} = 364.$$

Für die Summe s der 12 ersten dieser Zahlen erhalten wir:

$$s = \frac{1}{24} \cdot 12^4 + \frac{1}{4} \cdot 12^3 + \frac{11}{24} \cdot 12^2 + \frac{1}{4} \cdot 12 \text{ oder}$$

$$s = 1365.$$

Frage 123. Wie lautet das allgemeine Glied und wie die Summe der n ersten vierseitigen Pyramidalzahlen?

Antwort. Aus Frage 116 entnehmen wir als $n^{\underline{te}}$ vierseitige Pyramidalzahl:

$$y_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

denn diese Zahl ist das $n^{\underline{te}}$ Glied der I. Summenreihe der Quadratzahlen.

Zur Summenbildung von 1, 5, 14, 30, 55 ... schreiben wir:

$$\begin{array}{lllll}
y_1 = 1 & & & & \\
 & \Delta y_1 = 4 & & & \\
y_2 = 5 & & \Delta^2 y_1 = 5 & & \\
 & \Delta y_2 = 9 & & \Delta^3 y_1 = 2 & \\
y_3 = 14 & & \Delta^2 y_2 = 7 & & \\
 & \Delta y_3 = 16 & & \Delta^3 y_2 = 2 & \\
y_4 = 30 & & \Delta^2 y_3 = 9 & & \\
 & \Delta y_4 = 25 & & & \\
y_5 = 55 & & & &
\end{array}$$

Mit $y_1 = 1$, $\Delta y_1 = 4$, $\Delta^2 y_1 = 5$ und $\Delta^3 y_1 = 2$ gibt die Summenformel der vorigen Frage hier:

$$s = \frac{2}{24}n^4 + \left\{\frac{5}{6} - \frac{2}{4}\right\}n^3 + \left\{\frac{4}{2} - \frac{5}{2} + \frac{11 \cdot 2}{24}\right\}n^2$$

$$+ \left\{1 - \frac{4}{2} + \frac{5}{3} - \frac{2}{4}\right\}n$$

$$s = \frac{1}{12}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{5}{12}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Aufgabe 246. Wie heißt die 9te vierseitige Pyramidalzahl, und wie groß ist die Summe der neun ersten dieser Zahlen?

Antwort. Für $n = 9$ gibt das Vorausgehende als $9^{\underline{\underline{te}}}$ vierseitige Pyramidahlzahl:

$$\frac{9(9+1)(18+1)}{6} = 285.$$

Die Summe s der 9 ersten dieser Zahlen wird:

$$= \frac{1}{12}\cdot 9^4 + \frac{1}{3}\cdot 9^3 + \frac{5}{12}\cdot 9^2 + \frac{1}{6}\cdot 9 = 825.$$

Frage 124. Wie lautet das allgemeine Glied und die Summe der n ersten fünfseitigen Pyramidalzahlen?

Antwort. Der Frage 117 entnehmen wir als das gesuchte Glied:

$$y_n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Die Reihe der fünfseitigen Pyramidalzahlen 1, 6, 18, 40, 75 .... liefert $y_1 = 1$, $\triangle y_1 = 5$; $\triangle^2 y_1 = 7$ und $\triangle^3 y_1 = 3$; daher wird hier:

$$s = \frac{3}{24}\cdot n^4 + \left\{\frac{7}{6} - \frac{3}{4}\right\} n^3 + \left\{\frac{5}{2} - \frac{7}{2} + \frac{11\cdot 3}{24}\right\}\cdot n^2 + \left\{1 - \frac{5}{2} + \frac{7}{3} - \frac{3}{4}\right\} n$$

oder

$$s = \frac{1}{8} n^4 + \frac{5}{12} n^3 + \frac{3}{8} n^2 + \frac{1}{12} n.$$

Aufgabe 247. Wie heißt die 10te fünfseitige Pyramidalzahl, und wie groß ist die Summe der zehn ersten dieser Zahlen?

Auflösung. Setzen wir in den beiden vorigen Formeln $n = 10$ ein, so erhalten wir als $10^{\underline{te}}$ fünfseitige Pyramidalzahl:

$$\frac{10^2\cdot(10+1)}{2} = 550.$$

Die Summe s der 10 ersten dieser Zahlen wird:

$$\frac{1}{8}\cdot 10^4 + \frac{5}{12}\cdot 10^3 + \frac{3}{8}\cdot 10^2 + \frac{1}{12}\cdot 10$$

$$= 1705.$$

Frage 125. Wie lautet das allgemeine Glied der $m$seitigen Pyramidalzahlen, und wie groß ist die Summe der n ersten dieser Zahlen?

Erkl. 74. Der Leser wird gebeten, aus den zwei Formeln für das allgemeine Glied y_n und die Summe s der $m$seitigen Pyramidalzahlen durch Einsetzung der Werte $m = 3, 4, 5 \ldots$ die in den vorausgegangenen Fragen gefundenen Formeln abzuleiten.

Antwort. Aus der Frage 118 folgt als n^{tes} Glied y_n der $m$seitigen Pyramidalzahlen direkt:

$$y_n = \frac{n(n+1)}{6}\left\{5 - m + n(m-2)\right\}$$

Wir schreiben die 5 ersten dieser Zahlen an und bilden ihre Differenzen:

$$\begin{array}{llll}
y_1 = 1 & & & \\
y_2 = m+1 & \triangle y_1 = m & & \\
y_3 = 4m-2 & \triangle y_2 = 3m-3 & \triangle^2 y_1 = 2m-3 & \triangle^3 y_1 = m-2 \\
y_4 = 10m-10 & \triangle y_3 = 6m-8 & \triangle^2 y_2 = 3m-5 & \triangle^3 y_2 = m-2 \\
y_5 = 20m-25 & \triangle y_4 = 10m-15 & \triangle^2 y_3 = 4m-7 &
\end{array}$$

Zur Summenbildung haben wir also zu nehmen:

$$y_1 = 1,\quad \triangle y_1 = m,\quad \triangle^2 y_1 = 2m-3$$
$$\text{und}\quad \triangle^3 y_1 = m-2$$

und erhalten hiemit für die Summe s der n ersten Glieder:

$$s = \frac{m-2}{24}n^4 + \left\{\frac{2m-3}{6} - \frac{m-2}{4}\right\}n^3 + \left\{\frac{m}{2} - \frac{2m-3}{2} + \frac{11(m-2)}{24}\right\}n^2$$
$$+ \left\{1 - \frac{m}{2} + \frac{2m-3}{3} - \frac{m-2}{4}\right\}n$$

oder

$$s = \frac{m-2}{24}\cdot n^4 + \frac{m}{12}\cdot n^3 + \frac{14-m}{24}\cdot n^2 + \frac{6-m}{12}\cdot n \quad \ldots\ldots \text{№ } 40.$$

---

c) Aufgaben über Kugelhaufen.

Aufgabe 248. In einem Zeughause sind lauter Kugeln in Form einer dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet, so daß in der obersten Schicht nur 1, darunter 3, darunter 6, darunter 10 Kugeln usw. liegen. Wieviel Kugeln enthält die unterste Schicht und der ganze Haufen, wenn in jeder Seite der untersten Schicht 15 Kugeln liegen?

Auflösung. Die unterste Schicht bildet ein gleichseitiges Dreieck, welches so mit Kugeln gefüllt ist, daß in jeder Dreiecksseite 15 liegen; daher enthält der Bo en nach Frage 113:

$$\binom{15+1}{2} - 8\cdot 15 = 120 \text{ Kugeln.}$$

Der ganze Haufen muß nach Frage 122 enthalten:

$$\frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{6} = 680 \text{ Kugeln.}$$

Aufgabe 249. Wieviel Kugeln liegen in der vorigen Aufgabe in der 5ten Schicht, und wieviel Kugeln liegen im ganzen *über* dieser Schicht?

Auflösung. Die 5te Schicht stellt ein mit Kugeln gefülltes gleichseitiges Dreieck dar, welches längs einer Kante 5 Kugeln hat; daher ist die Zahl der letzteren gleich der fünften Dreieckszahl, also:

$$= \binom{6}{2} = 15.$$

Über dieser Schicht ist eine Pyramide, deren untenstehende Schicht in jeder Seite 4 Kugeln hat; somit sind in dieser Pyramide $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$ Kugeln enthalten.

Aufgabe 250. Ein Haufen von Kugeln bildet eine abgestumpfte dreiseitige Pyramide; in der Seite der obersten Schicht zählt man 5 Kugeln, in der Seite der untersten Schicht 15 Kugeln. Wieviel Kugeln liegen in den ganzen Haufen?

Auflösung. Unser vorliegender Kugelhaufen entsteht offenbar dadurch, daß wir von der Pyramide der vorletzten Aufgabe die kleine obere Pyramide der letzten Aufgabe abheben; somit bleiben $680 - 20 = 660$ Kugeln übrig.

Aufgabe 251. Ein Kugelhaufen bildet eine *abgestumpfte vierseitige Pyramide*; in der obersten Schicht liegen 10 Kugeln, längs jeder Seite und in der untersten sind in jeder Seite 20. Wieviel Kugeln liegen im ganzen Haufen?

Auflösung. Wäre die Pyramide vollständig, so müßte sie nach Frage 123:

$$\frac{20 \cdot (20+1)(2 \cdot 20 + 1)}{6} = 2870 \text{ Stück}$$

enthalten. Weggenommen ist oben eine Pyramide, welche in jeder Seite der untersten Schicht 9 Kugeln hat; diese Pyramide enthält:

$$\frac{9 \cdot (9+1)(2 \cdot 9 + 1)}{6} = 285 \text{ Stück.}$$

Hienach verbleiben für unseren Haufen noch $2870 - 285 = 2585$ Kugeln.

Aufgabe 252. Es sei auf einem horizontalen Boden die Schichtung der Kugeln zwischen zwei vertikalen Wänden so bewerkstelligt, daß die Form eines länglichen dreiseitigen Prismas entsteht. In der obersten Reihe, dem sogenannten Rücken, enthalte das Prisma m in einer Reihe liegende Kugeln; in der zweiten Schichte liegen $2m$ Kugeln in der Form eines Rechtecks, das längs einer Seite 2 und längs der andern Seite m Kugeln hat, in der dritten $3m$ usw. Kugeln. Wieviel Kugeln hat dann das Prisma bei n Schichten?

Auflösung. Da die Kugeln in der untersten Schichte auf dem Boden ein Rechteck erfüllen, welches in seinen Seiten m, beziehungsweise n Kugeln, also im ganzen mn Kugeln hat, so sind im ganzen Haufen

$$m+2m+3m+4m+\cdots+mn$$

$$=m(1+2+3+4+\cdots+n)=\frac{mn(n+1)}{2}$$

Kugeln.

Aufgabe 253. Es sollen die Kugeln in der Form eines nach allen vier Seiten abfallenden Daches aufgeschichtet sein, so daß jede Schicht die Form eines Rechteckes hat; in der obersten Schicht liegen m Kugeln, diese ruhen auf zwei Reihen von je $m+1$ Kugeln, diese wiederum auf drei Reihen von je $m+2$ Kugeln usw. Wieviel Kugeln liegen in dem Haufen, wenn n Schichten vorhanden sind?

Erkl. 75. In der Längsseite jedes Rechtecks nimmt die Kugelzahl bei jeder Schichte um 1 zu; da der Rücken sich aus m Kugeln, in gerader Linie liegend, zusammengesetzt, so haben die Längsseiten der folgenden Schichten $m+1$, $m+2$ usw. Kugeln; daher muß die Längsseite der n^{ten} Schicht eine Kugelzahl haben $=m+n-1$.

Auflösung. Hier handelt es sich um den Summierung der Reihe:

$$m+2(m+1)+3(m+2)+4(m+3)$$
$$+\cdots+n(m+n-1).$$

Daher schreiben wir:

$$\begin{array}{lll}
y_1=m & & \\
 & \triangle y_1=m+2 & \\
y_2=2m+2 & & \triangle^2 y_1=2 \\
 & \triangle y_2=m+4 & \\
y_3=3m+6 & & \triangle^2 y_2=2 \\
 & \triangle y_3=m+6 & \\
y_4=4m+12 & & \triangle^2 y_3=2 \\
 & \triangle y_4=m+8 & \\
y_5=5m+20 & & \cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots & &
\end{array}$$

und erhalten $y_1=m$, $\triangle y_1=m+2$, $\triangle^2 y_1=2$. Da aber nach Frage 74:

$$s=\frac{\triangle^2 y_1}{6}\cdot n^3+\left(\frac{\triangle y_1}{2}+\frac{\triangle^2 y_1}{2}\right)n^2+\frac{6y_1-3\triangle y_1+2\triangle^2 y_1}{6}\cdot n$$

ist, so folgt hier:

$$s=\frac{2n^3}{6}+\frac{1}{2}\left\{m+2-2\right\}n^2+\frac{1}{6}\left\{6m-3m-6+4\right\}n$$

$$=\frac{2n^3}{6}+\frac{3mn^2}{6}+\frac{(3m-2)n}{6}\quad\text{oder}$$

$$s=\frac{n(n+1)}{6}\left\{3m+2n-2\right\}$$

Erkl. 76. Es ist:

$$\frac{2n^3}{6}+\frac{3mn^2}{6}+\frac{(3m-2)n}{6}$$

$$=\frac{n}{6}\left\{2n^2+3mn+3m-2\right\}$$

$$=\frac{n}{6}\left\{2(n^2-1)+3m(n+1)\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}\left\{2(n-1)+3m\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}\left\{3m+2n-2\right\}.$$

Setzt man die Zahl der Kugeln in der Längsseite der Bodenschicht $= u$, so daß der Boden ein Rechteck ist mit u Kugeln in der Läng· und n Kugeln in der Tiefe, so ist $u = m + n - 1$; daraus ergibt sich $m = u - n + 1$; setzen wir dies oben in die Summenformel ein, so erhalten wir als Kugelzahl des Haufens:

$$s=\frac{n(n+1)}{6}(3u-n+1).$$

Aufgabe 254. Ein dachförmiger Kugelhaufen sei rechtwinklig gebogen; der Rücken habe längs des einen Schenkels des rechten Winkels a Kugeln und längs des anderen b Kugeln. Wieviel Kugeln hat der Haufen, wenn n Schichten vorhanden sind?

Antwort. Es ist leicht einzusehen, daß man diesen Haufen aus einem dachförmig gebauten entstanden denken kann, der in der Rückenlinie $a+b$ Kugeln hat und auch aus n Schichten besteht. Die Anzahl aller Kugeln ist daher nach der letzten Aufgabe:

$$=\frac{n(n+1)}{6}\left\{3.(a+b)+2n-2\right\}$$

Aufgabe 255. Von einem dachförmigen Haufen von Kugeln sind die oberen Schichten weggenommen; wie groß ist noch die Zahl der Kugeln, wenn die obere rechteckige Schichte in der Länge 9 und in der Tiefe 5 Kugeln hat, und im ganzen noch 6 Schichten vorhanden sind?

Erkl. 77. Der Leser wird gebeten, den obigen Körper zu zeichnen?

Auflösung. Aus diesen Angaben folgt, daß oben 4 Schichten fehlen; die unterste derselben bildet ein Rechteck mit 8 Kugeln in der Länge und 4 in der Tiefe; der Rücken ist eine mit 5 Kugeln besetzte Reihe. Dagegen haben wir als unterste Schichte des vorhandenen Haufens auf dem Boden ein Rechteck mit 14 Kugeln in der Länge und 10 in der Tiefe. Der ergänzte Haufen faßt daher nach der Formel:

$$s=\frac{n(n+1)}{6}(3m+2n-2)$$

der vorletzten Aufgabe, da $n = 10$ und $m = 5$ ist:

$$\frac{10.11}{6}\left\{15+20-2\right\}=605 \text{ Kugeln};$$

ferner hat der Ergänzungskörper nach derselben Formel, da für ihn $n = 4$ und $m = 5$ genommen werden muß:

$$\frac{4.5}{6}\left\{15+8-2\right\}=70 \text{ Kugeln.}$$

Hienach hat der gegebene Haufen $605-70=535$ Kugeln.

Aufgabe 256. Eine Anzahl Kugeln ist prismaartig zwischen zwei Kugelpyramiden so aufgeschichtet, daß der Rücken m Kugeln enthält, die folgende Schicht aus zwei Reihen von je $m-1$ Kugeln, die nächste aus 3 Reihen mit je $m-2$ Kugeln usw. besteht. Wie groß ist die Kugelzahl des ganzen Haufens, wenn dieser n Schichten hat?

Auflösung. Hier enthält die unterste $n^{\underline{te}}$ Schichte noch:

$$n\left\{m-(n-1)\right\}=n(m-n+1)$$

Kugeln Um die Summe der Kugeln in den n Schichten zu gewinnen, schreiben wir:

$$\begin{array}{lll} y_1 = m & & \\ & \triangle y_1 = m-2 & \\ y_2 = 2m-2 & & \triangle^2 y_1 = -2 \\ & \triangle y_2 = m-4 & \\ y_3 = 3m-6 & & \triangle^2 y_2 = -2 \\ & \triangle y_3 = m-6 & \\ y_4 = 4m-12 & & \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & & \end{array}$$

Mit $y_1 = m$, $\triangle y_1 = m-2$ und $\triangle^2 y_1 = -2$ gibt die Summenformel der Frage 74:

$$s=\frac{\triangle^2 y_1}{6}\cdot n^3+\left\{\frac{\triangle y_1}{2}-\frac{\triangle^2 y_1}{2}\right\}n^2+\frac{1}{6}\left\{6y_1-3\triangle y_1+2\triangle^2 y_1\right\}\cdot n$$

hier:

$$s=\frac{n(n+1)}{6}\left\{3m-2n+2\right\}.$$

---

d) Über figurierte Zahlen im besondern.

Frage 126. Welche Zahlenreihen nennt man figurierte Zahlen im engeren Sinne?

Antwort. Figurierte Zahlen im engeren Sinne heißen die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe und aller ihrer Summenreihen.

Erkl. 78. Aus der Hauptreihe

1, 2, 3, 4, 5 ...

erhalten wir nach Frage 104 als I. Summenreihe:

$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4\ldots$

oder:

1, 3, 6, 10 ...

Hienach ist die II. Summenreihe:

$1,\ 1+3,\ 1+3+6,\ 1+3+6+10\ldots$

oder:

1, 4, 10, 20 ...

und die III. Summenreihe:

$1,\ 1+4,\ 1+4+10,\ 1+4+10+20\ldots$

oder:

1, 5, 15, 35 u. s. f.

Die figurierten Zahlen I. Ordnung sind also:

1, 2, 3, 4, 5 ...

die der II. Ordnung sind:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 ...,

sie sind identisch mit den Dreieckszahlen, für welche wir das allgemeine Glied $\binom{n+1}{2}$ und als Summenformel $\binom{n+2}{3}$ gefunden haben. Siehe die Fragen 113 u. 115.

Die figurierten Zahlen III. Ordnung heißen:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120 ...

und sind identisch mit den dreiseitigen Pyramidalzahlen; für diese heißt das allgemeine Glied $\binom{n+2}{3}$ und für die Summe wurde gefunden $\binom{n+3}{4}$. S. die Frage 122.

Für die figurierten Zahlen IV. Ordnung als Glieder der Summenreihe der dreiseitigen Pyramidenzahlen erhalten wir also:

1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330 ...

mit dem allgemeinen Glied:

$\binom{n+3}{4}$ usw.

Frage 127. Wenn wir die $n\underline{\underline{te}}$ figurierte Zahl der $K\underline{\underline{ten}}$ Ordnung mit F_K^n bezeichnen, so folgen aus der Herleitung dieser Zahlen welche Formeln?

Antwort. Zunächst haben wir mit dieser Bezeichnung:

$$F_1^1=1;\quad F_1^2=2;\quad F_1^3=3;\quad F_1^4=4\ \ldots\ F_1^n=n.$$

$$F_2^1=1;\quad F_2^2=3;\quad F_2^3=6;\quad F_2^4=10\ \ldots\ F_2^n=\binom{n+1}{2}$$

$$F_3^1=1;\quad F_3^2=4;\quad F_3^3=10;\quad F_3^4=20\ \ldots\ F_3^n=\binom{n+2}{3}$$

$$F_4^1=1;\quad F_4^2=5;\quad F_4^3=15;\quad F_4^4=35\ \ldots\ F_4^n=\binom{n+3}{4}$$

. . . .

Somit ist $F_1^n = n$; $F_K^1 = 1$ und $F_K^n = F_K^{n-1} + F_{K-1}^n$; denn die Zahlen der $K\underline{\underline{ten}}$ Ordnung sind die Glieder der I. Summenreihe der Zahlen $K-1\underline{\underline{ter}}$ Ordnung; d. h. es muß sein:

$$F_K^2 = F_{K-1}^1 + F_{K-1}^2$$
$$F_K^3 = F_{K-1}^1 + F_{K-1}^2 + F_{K-1}^3 = F_K^2 + F_{K-1}^3$$
$$F_K^4 = F_{K-1}^1 + F_{K-1}^2 + F_{K-1}^3 + F_{K-1}^4 = F_K^3 + F_{K-1}^4$$
$$F_K^5 = F_{K-1}^1 + F_{K-1}^2 + F_{K-1}^3 + F_{K-1}^4 + F_{K-1}^5 = F_K^4 + F_{K-1}^5$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_K^n = F_{K-1}^1 + F_{K-1}^2 + \cdots + F_{K-1}^{n-1} + F_{K-1}^n = F_K^{n-1} + F_{K-1}^n$$

Frage 128. Wie groß ist die $n\underline{\underline{te}}$ figurierte Zahl der $K\underline{\underline{ten}}$ Ordnung?

Antwort. Es ist:

$$F_K^n = \binom{n+K-1}{K} \ldots \text{№ } 41$$

Um die Richtigkeit dieser Formel zu beweisen, bemerken wir, daß $n\underline{\underline{ten}}$ figurierten Zahlen für die 4 ersten Ordnungen bezüglich

$$\binom{n}{1}, \binom{n+1}{2}, \binom{n+2}{3}, \binom{n+3}{4}$$

sind. Hienach läßt sich erwarten, daß die $n\underline{\underline{te}}$ figurierte Zahl $K\underline{\underline{ter}}$ Ordnung $\binom{n+K-1}{K}$ ist. Wir wenden den Induktionsschluß an. Wir betrachten als bewiesen, daß der Satz für die $K\underline{\underline{te}}$ Reihe und für die n ersten Glieder der $K+1\underline{\underline{ten}}$ Reihe richtig sei, und leiten nun aus diesen Voraussetzungen und aus dem Gesetz über die Herleitung der Reihe das $n+1\underline{\underline{te}}$ Glied her.

Nach der in der vorigen Frage abgeleiteten Formel

$$F_K^n = F_K^{n-1} + F_{K-1}^n$$

muß sein:

$$F_{K+1}^{n+1} = F_{K+1}^n + F_K^{n+1}.$$

Nach unserer Annahme ist bewiesen, daß:

$$F_{K+1}^{n} = \binom{n+K}{K+1} \text{ und}$$

$$F_{K}^{n+1} = \binom{n+K}{K}$$

Die Addition gibt:

$$F_{K+1}^{n+1} = F_{K+1}^{n} + F_{K}^{n+1} = \binom{n+K}{K+1} + \binom{n+K}{K}$$

Nun ist aber nach Aufgabe 21:

$$\binom{n+K}{K+1} + \binom{n+K}{K} = \binom{n+K+1}{K+1}$$

Daher erhalten wir:

$$F_{K+1}^{n+1} = \binom{n+K+1}{K+1};$$

es befolgt also F_{K+1}^{n+1} dasselbe Bildungsgesetz. Daraus folgt: Wenn der Satz richtig ist für sämtliche Glieder K^{ter} Ordnung und für die n ersten Glieder $K+1^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist er auch richtig für das $n+1^{\text{te}}$ Glied $K+1^{\text{ter}}$ Ordnung. Unser Satz gilt aber sicher für alle Glieder der IV. Ordnung; ferner gilt er auch für das I. Glied V. Ordnung, denn es ist:

$$F_5^1 = \binom{1+5-1}{5} = \binom{5}{5} = 1.$$

Nach unserer Schlußweise muß der Satz nun auch richtig sein für das II. Glied V. Ordnung; gilt aber für das II. Glied, so muß er auch richtig sein für III. Glied und bei Wiederholung der Schlußweise für das IV. Gli d, und schließlich für alle Glieder V. Ordnung. Ferner ist · er Satz richtig für das I. Glied der VI. Ordnung, da:

$$F_6^1 = \binom{1+6-1}{6} = \binom{6}{6} = 1$$

ist. Daher gilt er für alle Glieder VI. Ordnung. Durch die Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich, daß der Satz für alle Glieder sämtlicher Ordnungen gilt, also allgemein giltig ist.

Erkl. 79. Die figurierten Zahlen sind schon von der Pythagoreischen Schule untersucht worden. Die ältesten Abhandlungen darüber sind verfaßt worden von Nicomachus und Diophantus. Im Mittelalter und später wurden die früher gefundenen Sätze verallgemeinert durch Maurolycus (1575), die schwäbischen Mathematiker Benz (1621) und Faulhaber (1631), ferner durch Fermat (1636) und Pascal (gestorben 1692).

3. Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 257. Wie heißen die ersten 6 Siebeneckszahlen, und wie heißt die allgemeine Form der Siebeneckszahlen?

Aufgabe 258. Wie heißen die ersten 5 Achteckszahlen, und wie heißt die allgemeine Form der Achteckszahlen?

Aufgabe 259. Wie heißt die IV. Neuneckszahl, und wie die n^{te} Neuneckszahl?

Aufgabe 260. Wie heißt die V. Zehneckszahl, und wie heißt die allgemeine Form dieser Zahlen?

Aufgabe 261. Beweise den Satz: Die Summe zweier aufeinander folgender Dreieckszahlen ist stets eine Quadratzahl, und zwar das Quadrat von dem Stellenzeiger der größeren.

Aufgabe 262. Beweise den Satz: Die Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgender Dreieckszahlen ist stets eine Kubikzahl, und zwar die dritte Potenz des Stellenzeigers der größeren.

Aufgabe 263. Wie heißt die 8^{te} dreiseitige Pyramidalzahl, und wie groß ist die Summe der 8 ersten dieser Zahlen?

Aufgabe 264. Wie heißt die 7^{te} viereckige Pyramidalzahl, und wie groß ist die Summe der 7 ersten dieser Zahlen?

Aufgabe 265. Wie heißt die 13^{te} fünfseitige Pyramidalzahl, und welche Summe gibt die Addition der 9 ersten derselben?

Aufgabe 266. Wie heißen die 10 ersten sechsseitigen Pyramidalzahlen, und wie groß ist ihre Summe?

Aufgabe 267. Wie heißen die 12 ersten m seitigen Pyramidalzahlen, und wie groß ist ihre Summe?

Aufgabe 268. Wieviel Kugeln liegen in einer dreiseitigen Pyramide, deren unterste Schichte eine Seite von 12 Kugeln hat?

Aufgabe 269. Ein Haufen von Kugeln bildet eine abgestumpfte dreiseitige Pyramide; in jeder Seite der obersten Schicht liegen fünf Kugeln, in jeder Seite der untersten Schicht zwölf Kugeln. Wieviel Kugeln hat der ganze Haufen?

Aufgabe 270. Wieviel Kugeln liegen in einer vierseitigen Pyramide, deren unterste Schicht eine Seite von 20 Kugeln hat?

Aufgabe 271. Ein Haufen von Kugeln bildet eine abgestumpfte vierseitige Pyramide; in jeder Seite der obersteu Schicht liegen acht Kugeln, in jeder Seite der untersten Schichte 20. Wieviel Kugeln hat der ganze Haufen?

Aufgabe 272. Es sollen 3650 Kugeln in einem fünfseitigen Kugelhaufen aufgestellt werden, so daß in jede Seite der untersten Schicht 20 Kugeln zu liegen kommen. Wird eine vollständige Pyramide aufgebaut werden können oder nur ein Rumpf? Wieviel Kugeln kommen in dem letzten Fall in jede Seite der obersten Schicht?

Aufgabe 273. Ein zwischen zwei parallele Wände aufgebauter prismatischer Kugelhaufen von zehn Schichten enthält im Rücken 18 Kugeln. Wieviel Kugeln enthält derselbe im ganzen?

Aufgabe 274. Ein dachförmiger Kugelhaufen von 15 Schichten ent-

hält im Rücken 25 Kugeln; wieviel befinden sich im ganzen Haufen?

Aufgabe 275. Ein dachförmiger Kugelhaufen hatte im Rücken 10 Kugeln; es fehlen jetzt die sechs obersten Schichten; wieviel Kugeln enthält der Rest des Haufens, wenn er noch sieben Schichten hat?

Aufgabe 276. Zwischen zwei quadratische Pyramiden, welche in der untersten Schichte je 576 Kugeln haben, wird ein Prisma aus Kugeln eingebaut, dessen Rücken 50 Kugeln erhält. Wenn nun das Prisma 10 Schichten hat, wieviel Kugeln befinden sich in dem ganzen Haufen?

V. Ueber Interpolation.

I. Erläuternde Fragen mit Antworten über die Interpolation im allgemeinen.

Frage 129. Was heißt bei einer arithmetischen Reihe beliebiger Ordnung interpolieren oder einschalten?

Antwort. In Frage 99 ist gezeigt worden, daß aus einer Reihe r^{ter} Ordnung $z_1, z_2, z_3 \ldots$ eine neue Reihe $y_1, y_2, y_3 \ldots$ ebenfalls r^{ter} Ordnung dadurch gewonnen werden kann, daß man nimmt:

$$y_1 = z_1,\ y_2 = z_{\pi+1},\ y_3 = z_{2\pi+1},$$
$$y_4 = z_{3\pi} + 1 \text{ usw.},$$

wobei π irgend eine ganze Zahl bedeutet. Nun läßt sich die Sache umdrehen; man kann ausgehen von der Reihe $y_1, y_2, y_3 \ldots$, welche von der r^{ten} Ordnung sein soll, und verlangen, die Glieder einer neuen Reihe r^{ter} Ordnung

$$z_1,\ z_2 \ldots z_\pi,\ z_{\pi+1},\ z_{\pi+2} \ldots$$

derart zu bestimmen, daß

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_{\pi+1} &= y_2 \\ z_{2\pi+1} &= y_3 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

wird, und die Reihe laute:

$$y_1\ z_2,\ z_3 \ldots z_\pi\ y_2 \,|\, z_{\pi+2},\ z_{\pi+3} \ldots z_{2\pi}\ y_3\ z_{2\pi+2},\ z_{2\pi+3} \ldots z_{3\pi}\ y_4 \ldots.$$

Hiebei müssen also zwischen je 2 Glieder der gegebenen Reihe $\pi - 1$ neue Glieder eingeschaltet oder interpoliert werden. Das Verfahren, welches die fehlenden Glieder liefert, heißt Interpolation. Wir lassen zunächst einige einfache Beispiele folgen.

Aufgabe 277. Zwischen je zwei Glieder der Reihe 3, 5, 7, 9.... sollen drei Glieder eingeschaltet werden, daß wieder eine Reihe I. Ordnung entsteht. Wie heißt die Reihe?

Auflösung. Hier haben wir gegegeben: $y_1 = 3$, $y_2 = 5$, $y_3 = 7$ und da je 3 Glieder eingeschaltet werden sollen, so folgt für die neue Reihe

$z_1, z_2, z_3, z_4 \ldots\ldots : z_1 = y_1 = 3;$

unbekannt sind z_2, z_3, z_4; z_5 muß $= y_2 = 5$ werden; ferner sind unbekannt z_6, z_7, z_8; z_9 muß $= y_3 = 7$ werden; unbekannt sind z_{10}, z_{11}, z_{12}; dagegen muß sein $z_{13} = y_4 = 9$ usw.

Nach Frage 60 kann das allgemeine Glied z_n einer Reihe I. Ordnung dargestellt werden in der Form $z_n = an + b$, worin n den Stellenzeiger darstellt, während a und b zwei konstante Größen bedeuten.

Hier bekommen wir für $n = 1$:

$$z_1 = a \cdot 1 + b = y_1 = 3$$

und für $n = 5$:

$$z_5 = a \cdot 5 + b = y_2 = 5.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$a = {}^1/_2 \text{ und } b = 2^1/_2.$$

Setzen wir $n = 2$, so folgt $z_2 = 1 + 2^1/_2 = 3^1/_2$
" " $n = 3$, " " $z_3 = 1^2/_2 + 2^1/_2 = 4$
" " $n = 4$, " " $z_4 = 2 + 2^1/_2 = 4^1/_2$
u. s. f.

Unsere neue Reihe heißt demnach:

$$3,\ 3^1/_2,\ 4,\ 4^1/_2,\ 5 \text{ usw.}$$

Aufgabe 278. Zwischen je zwei Glieder der Reihe 7, 4, 6, 13, 25 sind 2 Glieder so einzuschalten, daß wieder eine Reihe II. Ordnung entsteht? Wie heißt die neue Reihe?

Auflösung. Unsere gegebene Reihe heißt hier:

$$y_1 = 7,\ y_2 = 4,\ y_3 = 6 \ldots$$

und ist von der II. Ordnung; bezeichnen wir die gesuchte wieder mit $z_1, z_2, z_3 \ldots$, so haben wir: $z_1 = y_1$; z_2 und z_3 unbekannt, $z_4 = y_2$; z_5 und z_6 unbekannt, $z_7 = y_3$; z_8 und z_9 unbekannt usw.

Nach Frage 70 muß sich in der gesuchten Reihe das allge-

Erkl. 80. Zur Bestimmung der Größen a, b und c hat man die 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 7 \\ 16a + 4b + c &= 4 \\ 49a + 7b + c &= 6; \text{ durch Subtraktion folgt:} \\ \hline 15a + 3b &= -3 \\ 33a + 3b &= 2 \\ \hline 18a &= 5 \\ a &= \frac{5}{18} \text{ usw.} \end{aligned}$$

meine Glied z_n darstellen lassen in der Form:

$$z_n = an^2 + bn + c,$$

worin n irgend eine der Zahlen 1, 2, 3 ... vorstellt, während a, b, c konstante Größen bedeuten; letztere lassen sich bestimmen aus den gegebenen Bedingungen, daß für:

$n = 1$ das Glied $z_1 = y_1 = 7$

$n = 4$ „ „ $z_4 = y_2 = 4$ und

$n = 7$ „ „ $z_7 = y_3 = 6$

werden soll; dies liefert nämlich das System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} 7 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 4 &= a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \\ 6 &= a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$a = \frac{5}{18},\ b = -\frac{43}{18},\ c = \frac{164}{18}.$$

Hienach ist:

$$z_n = \frac{5n^2 - 43n + 164}{18}$$

Nehmen wir nun $n = 2$, so folgt $z_2 = 5\frac{4}{9}$; $n = 3$ gibt $z_3 = 4\frac{4}{9}$; $n = 5$ gibt $z_5 = 4\frac{1}{9}$; $n = 6$ gibt $z_6 = 4\frac{7}{9}$ u. s. f.

Die gesuchte Reihe lautet also:

$$7,\ 5\frac{4}{9},\ 4\frac{4}{9},\ 4,\ 4\frac{1}{9},\ 4\frac{7}{9},\ 6 \text{ usw.}$$

Aufgabe 279. Zwischen je zwei Glieder der Reihe 8, 5, 4, 4, 4, 3.. soll ein Glied eingeschaltet werden, daß wieder eine Reihe III. Ordnung entsteht. Wie heißt die Reihe?

Auflösung. Wie in den beiden vorigen Beispielen nehmen wir:

$y_1 = 8$, $y_2 = 5$, $y_3 = 4$, $y_4 = 4$ usw.

und suchen $z_1, z_2, z_3 \ldots$, daß $z_1 = y_1$, $z_3 = y_2$, $z_5 = y_3$, $z_7 = y_4$ wird.

Erkl. 81. Zur Bestimmung der 4 Größen a, b, c und d dienen die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} 343a + 49b + 7c + d &= 4 \\ 125a + 25b + 5c + d &= 4 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 5 \\ a + b + c + d &= 8; \text{ daraus} \\ \hline 218a + 24b + 2c &= 0 \\ 98a + 16b + 2c &= -1 \\ 26a + 8b + 2c &= -3 \\ \hline 120a + 8b &= 1 \\ 72a + 8b &= 2 \\ \hline 48a &= -1 \\ a &= -\frac{1}{48} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Setzen wir nach Frage 82 für das allgemeine Glied der gesuchten Reihe III. Ordnung:

$$z_n = an^3 + bn^2 + cn + d,$$

so liefern $n = 1, 2, 3, 5$ und 7 die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d &= y_1 = 8 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d &= y_2 = 5 \\ a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d &= y_3 = 4 \text{ u.} \\ a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d &= y_4 = 4. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$a = -\frac{1}{48},\ b = \frac{21}{48},\ c = -\frac{143}{48} \text{ u. } d = \frac{507}{48}$$

Hienach ist:

$$z_n = \frac{1}{48}\left\{-n^3 + 21n^2 - 143n + 507\right\}$$

und wir erhalten für $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ folgende Werte:

$$8,\ 6\frac{3}{16},\ 5,\ 4\frac{5}{16},\ 4,\ 3\frac{15}{16},\ 4 \text{ usw.}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Frage 130. Welches Interpolationsverfahren läßt sich aus den vorigen Beispielen ableiten?

Antwort. Sollen in der Reihe r^{ter} Ordnung y_1, y_2, y_3 usw. zwischen je 2 Glieder $\pi - 1$ Glieder eingeschaltet werden, daß wieder eine Reihe r^{ter} Ordnung $z_1, z_2, z_3 \ldots$ entsteht, so führen wir nach Frage 96 für das allgemeine Glied z_n dieser Reihe eine ganze Funktion r^{ten} Grades der Stellenzahl n ein:

$$z_n = an^r + bn^{r-1} + \cdots + pn + q.$$

Zur Bestimmung der $r + 1$ Konstanten $a, b, c \ldots p, q$ dienen dann die $r + 1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 = a \cdot 1^r + b \cdot 1^{r-1} + \cdots + p \cdot 1 + q \\ y_2 &= z_{\pi+1} = a(\pi + 1)^r + b(\pi + 1)^{r-2} + \cdots + p(\pi + 1) + q \\ y_3 &= z_{2\pi+1} = a(2\pi + 1)^r + b(2\pi + 1)^{r-1} + \cdots + p(2\pi + 1) + q \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{r+1} &= z_{r\pi+1} = a(r\pi + 1)^r + b(r\pi + 1)^{r-1} + \cdots + p(r\pi + 1) + q. \end{aligned}$$

Farrar fund

Math

Heft 1523	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik,** mathemat. **Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthilfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung**
der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. **A. Haas.**

Heft 11

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist

Durch Auflö ung dieser Gleichungen erhalten wir $a, b, c \ldots p$ und q, und damit den Zahlen-Ausdruck für das allgemeine Glied z_n; wird jetzt noch nach einander $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ gewählt, so erhält man aus dem genannten Ausdruck die Glieder der gesuchten Reihe.

Man sieht daraus, daß dieses Interpolationsverfahren auf die Auflösung eines Systems von $r+1$ linearen Gleichungen hinausläuft, wenn die gegebene Reihe von der $r^{\underline{ten}}$ Ordnung ist.

Frage 131. Welcher andere Weg läßt sich beim Interpolieren einschlagen?

Antwort. Man kann aus der gegebenen Reihe y_1, y_2, y_3 usw. die Anfangsglieder der Differenzenreihen bilden Δy_1, $\Delta^2 y_1$ u. s. f. bis $\Delta^r y_1$. Dann ist nach Frage 94:

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1 + \cdots \binom{n-1}{r}\Delta^r y_1.$$

Wir haben diese Formel bisher benützt, um bei gegebenen Werten von y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1 \ldots \Delta^r y_1$ die Glieder der Hauptreihe zu berechnen; hie'ei war die Größe n — der Stellenzeiger des zu findenden Gliedes — immer eine ganze Zahl.

Es läßt sich obige Formel aber auch anwenden, wenn wir n nicht als eine ganze Zahl, sondern als einen unechten Bruch nehmen; z. B.: $= \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}$ usw.; dann sind $y_{4/3}$, $y_{5/3}$, $y_{7/3} \ldots$ nach dem gleichen Gesetz gebildet wie $y_1, y_2 \ldots$ oder es sind $y_{4/3}$, $y_{5/3}$ zwei neue Glieder, welche in der gegebenen Reihe zwischen y_1 und y_2 eingeschaltet sind. — Würden wir ein anderes Mal setzen: $n = \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}$, so wären $y_{9/4}$, $y_{10/4}$, $y_{11/4}$ drei Glieder, welche zwischen y_2 und y_3 eingeschaltet sind.

Erkl. 82. Vertauschen wir wie früher in der nebenstehenden Formel den Buchstaben n durch x, so folgt:

$$y_x = y_1 + \binom{x-1}{1}\Delta y + \binom{x-1}{2}\Delta_2 y_1 + \cdots + \binom{x-1}{r}\Delta^r y_1$$

oder nach x geordnet:

$$y_x = ax^r + bx^{r-1} + \cdots + px + q,$$

so können wir der unabhängigen Veränderlichen x n'cht nur die ganzzahligen Werte $1, 2, 3 \ldots$ beilegen, um $y_1, y_2, y_3 \ldots$ zu erhalten, sondern auch jeden beliebigen Bruch-Wert $\frac{k}{l}$.

Geometrisch betrachtet, liefert

$$y_x = ax^r + bx^{r-1} + \cdots + px + q$$

eine Parabel und die Abszissen $x = 1, 2, 3, 4 \ldots$ mit den zugehörigen Ordinaten $y_1, y_2, y_3 \ldots$ bestimmen auf dieser Kurve die Punktreihe $P_1, P_2, P_3 \ldots$

Teilen wir auf der Abszissenachse die Strecke von $x = 1$ bis $x = 2$ durch die Punkte $x = \frac{4}{3}$ und $x = \frac{5}{3}$ in drei gleiche Teile, so sind die aus obiger Formel berechneten Werte $y_{4/3}$ und $y_{5/3}$ die zu den beiden Zwischenpunkten gehörigen Ordinaten; dadurch werden auf der Kurve zwischen P_1 und P_2 zwei weitere Punkte gewonnen; geradeso würden $x = \frac{7}{3}$ und

$x = \frac{8}{3}$ zwei neue Punkte zwischen P_2 und P_3 ergeben u. s. f. Die Einschaltung irgend eines Gliedes $y_{\frac{k}{l}}$, wo $k > l$ ist, bedeutet also geometrisch, zu der Punktreihe P_1, P_2, P_3 auf der parabolischen Kurve noch einen weiteren Punkt $P_{\frac{k}{l}}$ zu bestimmen.

2. Das Newton'sche Interpolationsverfahren.

Frage 132. Welches Interpolationsverfahren liefern die vorigen Betrachtungen?

Antwort. Sollen zwischen je 2 Glieder der Reihe $y_1, y_2, y_3 \ldots$ $\pi - 1$ Glieder eingeschaltet werden, so berechnet man die Differenzen Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1 \ldots$ bis $\Delta^r y_1$ und setzt in der Interpolationsformel:

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1 + \cdots + \binom{n-1}{r}\Delta^r y_1 \ldots \text{№} 42$$

für n successive die Werte:

$$\frac{\pi+1}{\pi},\ \frac{\pi+2}{\pi} \ldots \frac{2\pi-1}{\pi},\ \frac{2\pi+1}{\pi},\ \frac{2\pi+2}{\pi} \text{ usw.}$$

die hiebei auftretenden Werte

$$y_{\frac{\pi+1}{\pi}},\ y_{\frac{\pi+2}{\pi}} \text{ usw.}$$

sind dann die einzuschaltenden Glieder, so daß die erweiterte Reihe lautet:

$$y_1,\ y_{\frac{\pi+1}{\pi}},\ y_{\frac{\pi+2}{\pi}} \ldots y_{\frac{2\pi-1}{\pi}},\ y_2,\ y_{\frac{2\pi+1}{\pi}} \text{ u. s. f.}$$

Erkl. 83. Dieses Verfahren wurde von Newton angegeben; es findet sich in seinem Werk: Philosophiae naturalis principia mathematica. Bd. III. Lemm. 5. London 1687.

Aufgabe 280. Mittelst des vorigen Verfahrens die Aufgabe 277 zu lösen.

Auflösung. Aus der gegebenen Reihe 3, 5, 7, 9 ... erhalten wir $y_1 = 3$ und $\Delta y_1 = 2$; daher ist:

$$y_n = 3 + (n-1)2$$
$$y_{1^1/_4} = 3 + {}^1/_4 \cdot 2 = 3^1/_2$$
$$y_{1^2/_4} = 3 + {}^2/_4 \cdot 2 = 4$$
$$y_{1^3/_4} = 3 + {}^3/_4 \cdot 2 = 4^1/_2$$
. . . .

Daher lautet die gesuchte Reihe:

$3,\ 3^1/_2,\ 4,\ 4^1/_2$ usw.

Aufgabe 281. Desgleichen die Aufgabe 278 zu lösen.

Erkl. 84. Bilden wir zur gefundenen Reihe die Differenzen:

$$\begin{array}{lll} 7 & & \\ & -1^5/_9 & \\ 5^4/_9 & & ^5/_9 \\ & -1 & \\ 4^4/_9 & & ^5/_9 \\ & -^4/_9 & \\ 4 & & ^5/_9 \\ & +^1/_9 & \\ 4^1/_9 & & ^5/_9 \\ & +^6/_9 & \\ 4^7/_9 & & ^5/_9 \\ & +1^2/_9 & \\ 6 & & \end{array}$$

so sehen wir, daß sie von der II. Ordnung ist mit der konstanten Differenz $^5/_9$, während jene der gegebenen Reihe $=5$ ist; wie der Satz der Frage 99 es fordert.

Denn aus $\triangle^r y_1 = \triangle^r z_1 . \pi^r$ folgt:

$$\triangle^r z_1 = \frac{\triangle^r y_1}{\pi^r}.$$

Hier ist $\triangle^2 y_1 = 5$; $\pi = 3$ und $r = 2$, somit muß sein:

$$\triangle^2 z_1 = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}.$$

Auflösung. Aus der gegebenen Reihe 7, 4, 6, 13 ... bilden wir:

$$\begin{array}{lll} 7 & & \\ & -3 & \\ 4 & & +5 \\ & +2 & \\ 6 & & +5 \\ & +7 & \\ 13 & & \end{array}$$

und erhalten $y_1 = 7$; $\triangle y_1 = -3$ und $\triangle^2 y_1 = 5$; hieraus folgt:

$$y_n = 7 + (n-1)(-3) + \binom{n-1}{2} 5$$

und speziell:

$$y_{^4/_3} = 7 + \left(\frac{1}{3}\right)(-3) + \frac{^1/_3}{1} \cdot \frac{(-^2/_3)}{2} . 5 = 5^4/_9$$

$$y_{^5/_3} = 7 + \frac{2}{3}(-3) + \frac{^2/_3}{1} \cdot \frac{(-^1/_3)}{2} . 5 = 4^4/_9$$

$$y_{^7/_3} = 7 + \frac{4}{3}(-3) + \frac{^4/_3}{1} \cdot \frac{^1/_3}{2} . 5 = 4^1/_9$$

$$y_{^8/_3} = 7 + \frac{5}{3}(-3) + \frac{^5/_3}{1} \cdot \frac{^2/_3}{2} . 5 = 4^7/_9$$

Daher lautet die neue Reihe:

7, $5^4/_9$, $4^4/_9$, 4, $4^1/_9$, $4^7/_9$, 6 ...

Aufgabe 282. Desgleichen die Aufgabe 279.

Auflösung. Aus der gegebenen Reihe 8, 5, 4, 4, 4 ... folgt:

$$\begin{array}{llll} 8 & & & \\ & -3 & & \\ 5 & & 2 & \\ & -1 & & -1 \\ 4 & & 1 & \\ & 0 & & -1 \\ 4 & & 0 & \\ & 0 & & \\ 4 & & & \end{array}$$

$$y_1 = 8,\ \triangle y_1 = -3,\ \triangle^2 y_1 = 2,\ \triangle^3 y_1 = -1$$

$$y_n = 8 + (n-1)(-3) + \binom{n-1}{2} 2 - \binom{n-1}{3}$$

$$y_{1^1/_2} = 8 + \frac{1}{2}(-3) + \frac{^1/_2}{1} \cdot \frac{-^1/_2}{2} . 2 - \frac{^1/_2}{1} \cdot \frac{-^1/_2}{2} \cdot \frac{-^3/_2}{3}$$

$$= 6^3/_{16}$$

$$y_{2^1/_2} = 8 + \frac{3}{2}(-3) + \frac{^3/_2}{1} \cdot \frac{^1/_2}{2} \cdot 2 - \frac{^3/_2}{1} \cdot \frac{^1/_2}{2} \cdot \frac{-^1/_2}{3}$$

$$= 4^5/_{16}$$

$$y_{3^1/_2} = 8 + \frac{5}{2}(-3) + \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 - \frac{^5/_2}{1} \cdot \frac{^3/_2}{2} \cdot \frac{^1/_2}{3}$$

$$= 3^{15}/_{16}$$

. . . .

Unsere Reihe heißt hienach:

$8,\ 6^3/_{16},\ 5,\ 4^5/_{16},\ 4,\ 3^{15}/_{16},\ 4 \ldots$

Erkl. 85. Die gefundene Reihe liefert liefert die Differenzen:

$$\begin{array}{llll}
8 & & & \\
 & -^{29}/_{16} & & \\
6^3/_{16} & & +^{10}/_{16} & \\
 & -^{19}/_{16} & & -^2/_{16} \\
5 & & +^8/_{16} & \\
 & -^{11}/_{16} & & -^2/_{16} \\
4^5/_{16} & & +^6/_{16} & \\
 & -^5/_{16} & & -^2/_{16} \\
4 & & +^4/_{16} & \\
 & -^1/_{16} & & -^2/_{16} \\
3^{15}/_{16} & & +^2/_{16} & \\
 & +^1/_{16} & & \\
4 & & &
\end{array}$$

Die konstante Differenz III. Ordnung ist $= -^1/_8$, während jene der gegebenen $= -1$ ist; den Zusammenhang dieser zwei Größen liefert hier die Formel $\triangle^3 z_1 = \frac{\triangle^3 y_1}{2^3} = \frac{-1}{2^3} = -\frac{1}{8}$. Siehe Frage 99.

Aufgabe 283. In der Reihe der Kubikzahlen 1, 8, 27 ... sollen zwischen 4^3 und 5^3 drei Glieder eingeschaltet werden.

Erkl. 86. Die Reihe 64, $76\frac{49}{64}$, $91\frac{1}{8}$, $107\frac{11}{64}$, 125 liefert als konstante Differenzen III. Ordnung den Wert 0,09375; warum muß dieser Wert auftreten?

Auflösung. Aus $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$ ... bilden wir:

$$\begin{array}{llll}
64 & & & \\
 & 61 & & \\
125 & & 30 & \\
 & 91 & & 6 \\
216 & & 36 & \\
 & 127 & & 6 \\
343 & & 42 & \\
 & 169 & & \\
512 & & &
\end{array}$$

und erhalten $y_1 = 64$, $\triangle y_1 = 61$, $\triangle^2 y_1 = 30$ und $\triangle^3 y_1 = 6$. Daraus folgt:

$$y_n = 64 + (n-1)61 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot 30 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} \cdot 6$$

$$y_n = 64 + (n-1)61 + (n-1)(n-2)15 + (n-1)(n-2)(n-3)$$

Daher:

$$y_{1^1/_4} = 64 + \frac{1}{4} \cdot 61 + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 15 + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)$$

$$= 76\frac{49}{64} = 76{,}765625 = 4{,}25^3$$

$$y_{1^2/_4} = 64 + \frac{2}{4} \cdot 61 + \frac{2}{4} \cdot \left(-\frac{2}{4}\right) 15 + \frac{2}{4} \cdot \left(-\frac{2}{4}\right)\left(-\frac{6}{4}\right)$$

$$= 91\frac{1}{8} = 91{,}125 = 4{,}5^3$$

$$y_{1^3/_4} = 64 + \frac{3}{4} \cdot 61 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) 15 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$= 107\frac{11}{64} = 107{,}171875 = 4{,}75^3.$$

Erkl. 87. Die Interpolation findet ausgedehnte Anwendung sowohl in der Mathematik als auch in den Naturwissenschaften. In den verschiedenen Tafelwerken, z. B. Logarithmentafeln, Astronomischen Jahrbüchern, physikalischen Tabellen etc., findet man die Zahlenwerte gewisser Funktionen für einzelne numerische Werte der veränderlichen Größe angegeben, z. B. die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000, die Werte von Sinus für ganze Grade. Da man nun in der Anwendung die Werte der Funktionen auch für solche Werte braucht, die gerade nicht in der Tafel angegeben sind, so muß man Mittel haben, um aus den gegebenen numerischen Werten einer Funktion dieselbe auch für jeden beliebigen Wert der Veränderlichen berechnen zu können.

In den Naturwissenschaften liefern sehr oft eine Reihe von Versuchungen und Beobachtnngen dadurch eine korrespondierende Reihe von Zahlenwerten, daß man der unabhängigen veränderlichen Größe nach und nach gleichmäßig fortschreitende Werte beilegt; man läßt z. B. den Druck je um 1 Atmosphäre, oder die Zeit von Stunde zu Stunde, oder die Temperatur von Grad zu Grad sich ändern. Dann handelt es sich darum, aus den Beobachtungsresultaten auch Zwischenresultate, z. B. für Bruchteile von Atmosphären und Stunden, durch Rechnung zu erhalten.

Hierzu dient die Interpolationsrechnung. Indem sie die gegebenen numerischen Werte als Glieder einer arithmetischen Reihe betrachtet, denkt sie sich die veränderliche Größe, durch eine ganze rationale Funktion der unabhängigen Veränderlichen dargestellt; an die Stelle der wirklichen Funktion, die man sehr oft gar nicht kennt, setzt sie also eine solche, welche nach ganzen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreitet. Daß dies nicht immer zulässig ist, beweist die Differenzialrechnung. Siehe Haas-Kleyer, Differenzialrechnung II. Teil. Taylorscher Lehrsatz.

Aufgabe 284. Man hat durch Versuche gefunden, daß für die Spannkraft des Wasserdampfes den Temperaturen 1^0, 3^0, 5^0, 7^0, 9^0 die Zahlen entsprechen: 0,1422; 0,1741; 0,2122; 0,2571; 0,3101; 0,3721; 0,4445 und soll nun hieraus die den Temperaturen 2^0, 4^0, 6^0... entsprechenden Zahlen berechnen.

Auflösung. Bezeichnen wir die Zahlenwerte 0,1422; 0,1741 usw. mit y_1, y_2, y_3..., so entspricht y_1 der Temperatur 1^0, y_2 der Temperatur 3^0, y_3 jener von 5^0 usw. Die Zahlenwerte, welche den Temperaturen 2^0, 4^0, 6^0 entsprechen, sind offenbar die Glieder, welche in der gegebenen Reihe zwischen y_1 und y_2; y_2 und y_3 usw. eingeschaltet werden können. Wir haben demnach die Aufgabe, in der gegebenen Reihe zwischen zwei Gliedern je ein Glied einzuschalten. Durch Bildung der Differenzenreihen folgt:

y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$
$y_1 = 0{,}1422$			
	0,0319		
$y_2 = 0{,}1741$		0,0062	
	0,0381		0,0006
$y_3 = 0{,}2122$		0,0068	
	0,0449		0,0013
$y_4 = 0{,}2571$		0,0081	
	0,0530		0,0009
$y_5 = 0{,}3101$		0,0090	
	0,0620		0,0014
$y_6 = 0{,}3721$		0,0104	
	0,0724		
$y_7 = 0{,}4445$			

Nimmt man die Glieder der dritten Differenzenreihe, da dieselben nur sehr wenig von einander abweichen, als konstant und gleich 0,0012 an, so hat man:

$$y_1 = 0{,}1422;\quad \triangle y_1 = 0{,}0319;$$
$$\triangle^2 y_1 = 0{,}0062 \text{ und } \triangle^3 y = 0{,}0012.$$

Die Newtonsche Interpolationsformel liefert für $n = 1 + \frac{\nu}{2}$:

$$y_{1+\frac{\nu}{2}} = y_1 + \frac{\nu}{2}\triangle y_1 + \frac{\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\triangle^2 y_1 + \frac{\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\left(\frac{\nu}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\triangle^3 y_1$$

oder:

$$y_{1+\frac{\nu}{2}} = y_1 + \frac{\nu}{2}\triangle y_1 + \frac{\nu(\nu-2)}{8}\triangle^2 y_1 + \frac{\nu(\nu-2)(\nu-4)}{48}\triangle^3 y_1.$$

Für die obigen Werte von y_1, $\triangle y_1$ usw. erhalten wir:

$$y_{1+\frac{\nu}{2}} = 0{,}1422 + \frac{\nu}{2} \cdot 0{,}0319 + \frac{\nu(\nu-2)}{8} \cdot 0{,}0062 + \frac{\nu(\nu-2)(\nu-4)}{48} \cdot 0{,}0012$$

oder ausgerechnet und zusammengezogen:

$$y_{1+\frac{\nu}{2}} = 0{,}1422 + 0{,}0146\,\nu + 0{,}000625\,\nu^2 + 0{,}000025\,\nu^3$$

hieraus folgt für $\nu = 1$:

$$y_{1^1/_2} = 0{,}1422 + 0{,}0146 + 0{,}000625 + 0{,}000025 = 0{,}1574$$

$\nu = 3$ ergibt:

$$y_{2^1/_2} = 0{,}1422 + 0{,}0146 \cdot 3 + 0{,}000625 \cdot 9 + 0{,}000025 \cdot 27 = 0{,}1923$$

$\nu = 5$ liefert $y_{3^1/_2} = 0{,}2339$ und
$\nu = 7$ „ $y_{4^1/_2} = 0{,}2836$ usw.

Die gewünschten Zahlen sind hienach:

0,1574; 0,1923; 0,2339; 0,2836 ...

Aufgabe 285. Eine Tafel enthält die gemeinen Logarithmen von 1 bis 1000 auf 7 Dezimalen. Man soll den Logarithmus von 987,65 auf ebensoviel Stellen bestimmen.

Auflösung. Der gemeine Logarithmus von 987,65 hat die Kennziffer 2 und eine Mantisse, welche bestimmt werden muß. Aus der Tafel nehmen wir die Logarithmen von 987, 988, 989, 990 und 991, und bilden die Differenzenreihen; dabei erhalten wir:

	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$
log. 987	= 2,9943172		
		0,0004397	
„ 988	= 2,9947569		— 0,0000003
		0,0004394	
„ 989	= 2,9951 63		— 0,0000005
		0,0004389	
„ 990	— 2,9956352		— 0,0000004
		0,0004385	
„ 991	= 2,9960737		

Nehmen wir die zweiten Differenzen als konstant und = — 0,0000004 an, so haben wir zunächst:

$y_1 = 2{,}9943172$; $\triangle y_1 = 0{,}0004397$
und $\triangle^2 y_1 = -0{,}0000004$.

Die Newtonsche Interpolationsformel liefert hier für $n = 1 + \frac{\nu}{100}$:

$$y_{1+\frac{\nu}{100}} = y_1 + \frac{\nu}{100} \cdot \triangle y_1 + \frac{\frac{\nu}{100}\left(\frac{\nu}{100} - 1\right)}{1 \cdot 2} \cdot \triangle^2 y_1 \text{ oder}$$

$$= 2{,}9943172 + \frac{\nu}{100} \cdot 0{,}0004397 - \frac{\frac{\nu}{100} \cdot \left(\frac{\nu}{100} - 1\right)}{2} \cdot 0{,}0000004$$

$$= 2{,}9943172 + 0{,}000004399\,\nu - 0{,}00000000002\,\nu^2.$$

Erkl. 88. Wenn wir zwischen y_1 und y_2, d. h. zwischen log. 987 und log. 988 in der obigen Reihe 99 Glieder einschalten, so sind die eingeschalteten Glieder die Logarithmen der Zahlen 987,01; 987,02; .... 987,65; .... 987,99; hier ist nur log 987,65 gesucht oder das Glied $y_{1^{65}/_{100}}$, welches nach der Newtonschen Formel berechnet wird.

Für $\nu = 65$ erhalten wir jetzt:

$$y_{1^{65}/_{100}} = \log.\ 987{,}65 = 2{,}994603051$$

oder auf 7 Dezimalen abgerundet:

$$\log.\ 987{,}65 = 2{,}9946031.$$

3. Das Enckesche Interpolationsverfahren.

Frage 133. Wie lassen sich für die Interpolation bequemere Formeln gewinnen?

Erkl. 89. Der deutsche Astronom Johann Franz Encke, geb. 1791 zu Hamburg, gest. 1865 zu Spandau, veröffentlichte sein Interpolationsverfahren im Berliner Astronomischen Jahrbuch 1837.

Antwort. Der Gedanke, welche der Vereinfachung zu Grunde gelegt wird, konzentriert sich darin, nicht das Anfangsglied der Hauptreihe und die ersten Glieder der Differenzenreihen bei der Interpolation zu verwenden wie bei der Formel von Newton, sondern es sollen Glieder aus der Mitte der Reihen genommen werden, um daraus und aus der Stellenzahl eines Gliedes die Formel für dasselbe zusammenzusetzen.

Wir beschränken uns hier auf die Angabe der Methode von Encke, welche in der Praxis wohl am häufigsten angewendet wird.

Frage 134. Wie läßt sich das Enckesche Interpolationsverfahren ableiten?

Antwort. Wir nehmen an, eine Funktion $f(x)$ der unabhängigen Größe x, — wir nennen diese von jetzt ab das Argument — ergeben

Erkl. 90. Der Leser wird gebeten zu beachten, daß die Differenzenreihen hier geradeso gebildet werden wie wir früher aus y_1, y_2, y_3, y_4 usw, $\triangle y_1, \triangle y_2, \triangle y_3, \ldots$ und aus letzteren $\triangle^2 y_1, \triangle^2 y_2, \triangle^2 y_3$ usw. gebildet haben; es ist hier für diese Differenzen nur eine andere Bezeichnung eingeführt. Daher behält auch die Formel für das allgemeine Glied ihre Giltigkeit für unsere neuen Differenzenreihen.

für x den Wert y; dann haben wir:

$$y = f(x).$$

Wir lassen nun die Argumentwerte eine arithmetische Reihe bilden mit dem Anfangswert a und der konstanten Differenz w; d. h. wir setzen in die obige Funktion für x nach und nach die Werte ein: a, $a + w$, $a + 2w$, $a + 3w$ usw. und $a - w$, $a - 2w$, $a - 3w$ usw. die Werte, welche die Funktion hiebei liefert, sollen bezeichnet werden durch $f(a)$, $f(a + w)$, $f(a + 2w) \ldots$ oder $f(a - w)$, $f(a - 2w) \ldots$ usw. Jedes beliebige Argument x kann man dann durch $a + nw$ bezeichnen, wo jetzt n die veränderliche Größe ist, und die zu diesem Argument gehörige Funktion geben wir dann durch $f(a + nw)$. Die Differenz von zwei aufeinander folgenden Funktionenwerte

$$f(a + nw) \text{ und } f(a + \overline{n + 1})w$$

soll durch $f^I\left(a + n + \frac{1}{2}\right)$ bezeichnet werden, indem man, um anzugeben, zu welchen Funktionenwerten diese Differenz gehört, unter das Funktionenzeichen das arithmetische Mittel beider Argumente setzt und dabei den Faktor w wegläßt. So drückt $f^I\left(a + \frac{1}{2}\right)$ die Differenz von $f(a)$ und $f(a + w)$; $f^I\left(a + \frac{3}{2}\right)$ die Differenz von $f(a + w)$ und $f(a + 2w)$ aus. Das gleiche gilt auch von den höheren Differenzen, deren Ordnung durch den Akzent rechts oben ausgedrückt wird. So ist z. B. $f^{II}(a + 1)$ die Differenz der beiden ersten Differenzen $f^I\left(a + \frac{1}{2}\right)$ und $f^I\left(a + \frac{3}{2}\right)$; $f^{III}\left(a + \frac{3}{2}\right)$ ist der Unterschied der beiden zweiten Differenzen $f^{II}(a + 1)$ und $f^{II}(a + 2)$ usw.

Auf diese Weise erhalten wir folgendes Schema der Argumente,

der zu diesen gehörigen Funktionenwerte und der Differenzen der letzteren:

Argument	Funktion	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.	V. Diff.
....	....					
		......				
$a-3w$	$f(a-3w)$					
		$f^{I}\left(a-\frac{5}{2}\right)$	......			
$a-2w$	$f(a-2w)$		$f^{II}(a-2)$	....		
		$f^{I}\left(a-\frac{3}{2}\right)$		$f^{III}\left(a-\frac{3}{2}\right)$	....	
$a-w$	$f(a-w)$		$f^{II}(a-1)$		$f^{IV}(a-1)$	....
		$f^{I}\left(a-\frac{1}{2}\right)$		$f^{III}\left(a-\frac{1}{2}\right)$		$f^{V}\left(a-\frac{1}{2}\right)$
a	$f(a)$		$f^{II}(a)$		$f^{IV}(a)$	
		$f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)$		$f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$		$f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)$
$a+w$	$f(a+w)$		$f^{II}(a+1)$		$f^{IV}(a+1)$	....
		$f^{I}\left(a+\frac{3}{2}\right)$		$f^{III}\left(a+\frac{3}{2}\right)$	....	
$a+2w$	$f(a+2w)$		$f^{II}(a+2)$	....		
		$f^{I}\left(a+\frac{5}{2}\right)$	......			
$a+3w$	$f(a+3w)$					
		......				
....	....					

Alle Differenzen, welche dieselbe Größe unter dem Funktionenzeichen haben, stehen hier auf derselben horizontalen geraden Linien, z. B. $f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)$, $f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$, $f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)$ $f(a-2w)$, $f^{II}(a-2)$. Die Differenzen der ungeraden Ordnungen haben alle als Größe unter dem Funktionenzeichen a plus einen Bruch mit dem Nenner 2.

Wird jetzt ein beliebiger Wert des Argumentes x mit $a+nw$ bezeichnet, wo man a stets so wählen kann, daß n ein echter Bruch wird und $f(a+nw)$ zwischen $f(a)$ und $f(a+w)$ fällt, so gibt die Newtonsche Formel:

$$f(a+nw)=f(a)+\binom{n}{1}f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\binom{n}{2}f^{II}(a+1)+\binom{n}{3}f^{III}\left(a+\frac{3}{2}\right)$$
$$+\binom{n}{4}f^{IV}(a+2)+\cdots$$

Wir ändern nun diese Formel so um, daß darin bloß Differenzen

vorkommen, welche auf einer horizontalen geraden Linie stehen, so daß, wenn man von dem Wert $f(a)$ ausgeht, die Differenzen $f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)$, $f^{II}(a)$, $f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$, $f^{IV}(a)$ usw. anzuwenden hat. Es müssen hienach $f^{II}(a+1)$, $f^{III}\left(a+\frac{3}{2}\right)$, $f^{IV}(a+2)$ in $f^{II}(a)$, $f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$, $f^{IV}(a)$ usw. ausgedrückt werden.

Wir haben aber:

$$f^{II}(a+1)=f^{II}(a)+f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$f^{III}\left(a+\frac{3}{2}\right)=f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{IV}(a+1)=f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{IV}(a)+f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}f^{IV}(a+2)&=f^{IV}(a+1)+f^{V}\left(a+\frac{3}{2}\right)=f^{IV}(a)+f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)\\&\qquad+f^{VI}(a+1)\\&=f^{IV}(a)+2f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{VI}(a)\\&\qquad+f^{VII}\left(a+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$f^{V}\left(a+\frac{5}{2}\right)=f^{V}\left(a+\frac{3}{2}\right)+f^{VI}(a+2)=f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{VI}(a+1)+f^{VI}(a+2)$$

. . . .

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}f(a+nw)&=f(a)+\binom{n}{1}f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\binom{n}{2}\left\{f^{II}(a)+f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}\\&\quad+\binom{n}{3}\left\{f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{IV}(a)+f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}\\&\quad+\binom{n}{4}\left\{f^{IV}(a)+2f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{VI}(a)+f^{VII}\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}+\binom{n}{5}\left\{f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots\right\}+\cdots\\&=f(a)+\binom{n}{1}f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\binom{n}{2}f^{II}(a)+\left\{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right\}f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)\\&\quad+\left\{\binom{n}{3}+\binom{n}{4}\right\}f^{IV}(a)+\left\{\binom{n}{3}+2\binom{n}{4}+\binom{n}{5}\right\}f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\binom{n+1}{3}$$

$$\binom{n}{3}+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{4}$$

$$\binom{n}{3}+2\binom{n}{4}+\binom{n}{5}=\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\binom{n}{4}+\binom{n}{5}$$

$$=\binom{n+1}{4}+\binom{n+1}{5}=\binom{n+2}{5}$$

Daher wird:

$$f(a+nw)=f(a)+\binom{n}{1}f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\binom{n}{2}f^{II}(a)+\binom{n+1}{3}f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\binom{n+1}{4}f^{IV}(a)+\binom{n+2}{5}f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\binom{n+2}{6}f^{VI}(a)+\cdots \quad \text{№ 43}$$

Dies ist die Interpolationsformel von Encke in der allgemeinen Gestalt. Die Art ihrer Anwendung sollen folgende Beispiele zeigen.

Aufgabe 286. Berechne den Logarithmus von sin. $0^0\ 34'\ 36''$ aus einer Tafel, welche die Logarithmen der Sinus von ganzen Minuten enthält.

Erkl. 91. Hier sind die Argumente die Minuten $30'$, $31'$, $32'$ ...., somit ist hier $w=1$; die Funktion f ist der Sinus des Arguments. Um $34'\ 36''$ darzustellen, setzen wir:

$$34'\ 36''=0^0\ 34',6=34'+0.6.1$$

und nehmen $a=0^0\ 34'$, $w=1$ und $n=0{,}6$. Es muß hienach zwischen $f(34')$ und $f\ (35')$ das Glied $f\ (34{,}6')$ interpoliert werden.

Auflösung. $0^0\ 34'\ 36''=0^0\ 34',6$.
Nun erhalten wir mit der Tafel:

	f	f^{I}	f^{II}	f^{II}
sin. $0^0\ 30'$ =	7 . 94084			
		1424		
„ $0^0\ 31'$ =	7 . 95508		−45	
		1379		2
„ $0^0\ 32'$ =	7 . 96887		−43	
		1336		4
„ $0^0\ 33'$ =	7 . 98223		−39	
		1297		1
„ $0^0\ 34'$ =	7 . 99520		−38	
		1259		2
„ $0^0\ 35'$ =	8 . 00779		−36	
		1223		
„ $0^0\ 36'$ =	8 . 02002			

Für $a=0^0\ 34'$ ist

$$f(a)=7.99520;\ f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)=0.01259;$$

$$f^{II}(a)=-0.00038;$$

$$f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)=0.00002.$$

Betrachten wir die dritten Differenz n als konstant und nehmen, da $w = 1$ ist, $n = 0{,}6$ an, so erhalten wir:

$$f(34{,}6') = f(34') + 0{,}6 f^{I}\left(34 + \frac{1}{2}\right) + \binom{0{,}6}{2} f^{II}(34) + \binom{1{,}6}{3} f^{III}\left(34 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= f(34') + 0{,}6 f^{I}\left(34 + \frac{1}{2}\right) - 0{,}12 f^{II}(34) - 0{,}064 f^{III}\left(34 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 7.99520 + 0.007554 + 0.0000456 - 0.0000013$$

$$= 8.0027983 \text{ oder abgekürzt } = 8.00280.$$

Somit heißt unser Resultat:

log. sin. $34' 36'' = 8.00280$.

Aufgabe 287. Für die heliozentrische Länge des Planeten Merkur sind folgende Werte bekannt:

Januar	0.	303° 25′ 1″,5
„	2.	310° 6′ 51″,5
„	4.	317° 7′ 29″,5
„	6.	324° 29′ 39″,9
„	8.	332° 16′ 17″,2
„	10.	340° 30′ 20″,6.

Berechne die Länge für Januar 7·12^h.

Auflösung. Das Intervall in der gegebenen Reihe der Argumente beträgt 2 Tage, und vom 6. Januar 0^h bis 7. Januar 12^h sind es $1\frac{1}{2}$ Tage; setzen wir $a = 6$, $w = 2$, so folgt $n = \frac{3}{4}$ und $a + nw = 6 + \frac{3}{4} w$. Wir haben also $f\left(6 + \frac{3}{4} w\right)$ zu berechnen aus $f(6)$, $f^{I}\left(6 + \frac{1}{2}\right)$, $f^{II}(6)$, $f^{III}\left(6 + \frac{1}{2}\right)$ usw.

Die Differenzenbildung ergibt:

	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
Jan. 0.	303° 25′ 1″,5				
		+ 6° 41′ 50″,0			
„ 2.	310° 6′ 51″,5		+ 18′ 48″,0		
		7° 0′ 38″,0		+ 2′ 44″,4	
„ 4.	317° 7′ 29″,5		21′ 32″,4		+ 10″,1
		7° 22′ 10″,4		2′ 54″,5	
„ 6.	324° 29′ 39″,9		25′ 26″,9		+ 4″,7
		7° 46′ 37″,3		2′ 59″,2	
„ 8.	332° 16′ 17″,2		27′ 26″,1		
		8° 14′ 3″,4			
„ 10.	340° 30′ 20″,6				

Somit ist:

$$f(6) = \qquad 324^0\,29'\,39'',9$$
$$f^I\left(6+\frac{1}{2}\right) = 7^0\,46'\,37'',3$$
$$f^{II}(6) = \qquad 24'\,26'',9$$
$$f^{III}\left(6+\frac{1}{2}\right) = \qquad 2'\,59'',2$$
$$f^{IV} = \qquad 4'',7$$

Die Enckesche Formel liefert hier:

$$f\left(6+\frac{3}{4}w\right) = f(6)+\frac{3}{4}\cdot f^I\left(6+\frac{1}{2}\right)+\binom{^3/_4}{2}f^{II}(a)+\binom{^7/_4}{3}f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\binom{^7/_4}{4}f^{IV}(a).$$

Nun ist:

$$\binom{^3/_4}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{32}$$
$$\binom{^7/_4}{3} = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{128}$$
$$\binom{^7/_4}{4} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{35}{2048};$$

somit:

$$f\left(6+\frac{3}{4}w\right) = 324^0 29' 39{,}9'' + \frac{3}{4}\left\{7^0\,46'\,37'',3\right\} - \frac{3}{32}\left\{24'\,26'',9\right\} - \frac{7}{128}\left\{2'\,59'',2\right\}$$
$$+\frac{35}{2048}\left\{4'',7\right\} = 330^0\,17'\,10'',6.$$

Somit beträgt die heliozentrische Länge des Merkur am 7. Jan. 12^h:

$330^0\,17'\,10'',6$.

Frage 135. Wie vereinfacht sich die Enckesche Formel für die Interpolation in der Mitte?

Antwort. Soll zwischen je zwei Gliedern ein Glied interpoliert werden, ist $n=\frac{1}{2}$ zu nehmen und hiemit folgt:

$$f\left(a+\frac{1}{2}w\right) = f(a)+\frac{1}{2}f^I\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{^1/_2(-^1/_2)}{1\cdot 2}f^{II}(a)+\frac{^3/_2\cdot{}^1/_2(-^1/_2)}{1\cdot 2\cdot 3}f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{^3/_2\cdot{}^1/_2\cdot(-^1/_2)(-^3/_2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^{IV}(a)+\cdots \quad \text{oder}$$

$$f\left(a+\frac{1}{2}w\right)=f(a)+\frac{1}{2}f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}f^{II}(a)-\frac{1}{16}f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{3}{128}f^{IV}(a)+\frac{3}{256}f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{1024}f^{VI}(a)+\cdots\cdots\quad \text{№ } 44$$

Aufgabe 288. Berechne den Frühlingsanfang aus folgenden Deklinationen der Sonne:

13.	März $\delta =$	$-2^0\,53'\,21'',3$
15.	„	$-2^0\;6'\;3'',0$
17.	„	$-1^0\,18'\,40'',5$
19.	„	$-0^0\,31'\,16'',6$
21.	„	$0^0\,16'\;6'',2$
23.	„	$1^0\;3'\,25'',1$.

Auflösung. Der Frühling beginnt im Augenblick des Überganges der Sonne von der südlichen Hälfte auf die nördliche Hälfte der Himmelskugel, also in dem Augenblick, in welchem die Deklination der Sonne von den negativen Werten durch Null hindurch zu positiven Werten übergeht; unsere Angaben sagen, daß dieses Ereignis zwischen den 19ten und 21ten März stattfindet. Zur genaueren Bestimmung dieses Zeitpunktes interpolieren wir in der Mitte zwischen den 4 letzten Gliedern und erhalten:

		f	f^{I}	f^{II}	f^{III}
März	13.	$-2^0\,53'\,21'',3$			
			$47'\,18'',3$		
„	15.	$-2^0\;6'\;3'',0$		$4'',2$	
			$47'\,22'',5$		$-2'',8$
„	17.	$-1^0\,18'\,40'',5$		$1'',4$	
			$47'\,23'',9$		$-2'',5$
„	19.	$-0^0\,31'\,16'',6$		$-1'',1$	
			$47'\,22'',8$		$-2'',8$
„	21.	$0^0\,16'\;6'',2$		$-3'',9$	
			$47'\,18'',9$		
„	23.	$1^0\;3'\,25'',1$			

Um die Deklination für den 18. März zu finden, interpolieren wir in der Mitte zwischen $f(17)$ und $f(19)$, und erhalten:

$$f(18)=f(17)+\frac{1}{2}f^{I}\left(17+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}f^{II}(17)-\frac{1}{16}f^{III}\left(17+\frac{1}{2}\right)$$

$$=-1^0\,18'\,40'',5+\frac{1}{2}\cdot\left\{47'\,23'',9\right\}-\frac{1}{8}\cdot\left\{1'',4\right\}-\frac{1}{16}\left\{-2'',5\right\}$$

$$=-1^0\,18'\,40'',5+23'\,41'',95-0'',18+0'',16=-0^0\,54'\,58{,}6''$$

Ebenso bilden wir:

$$f(20) = f(19) + \frac{1}{2} f^{I}\left(19 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} f^{II}(19) - \frac{1}{16} f^{III}\left(19 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -0^0\,31'\,16'',6 + \frac{1}{2} \cdot \left\{47'\,22'',8\right\} - \frac{1}{8}\left\{-1'',1\right\} - \frac{1}{16}\left\{-2,8''\right\}$$

$$= -0^0\,7'\,34'',9$$

$$f(22) = f(21) + \frac{1}{2} f^{I}\left(21 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} f^{II}(21) - \frac{1}{16} f^{III}\left(21 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= +0^0\,16'\,6'',2 + \frac{1}{2}\left\{47'\,18'',9\right\} - \frac{1}{8} \cdot \left\{-3'',9\right\} - \frac{1}{16}\left\{-2'',6\right\}$$

$$= +0^0\,39'\,46'',3.$$

Nun bilden wir abermals die Differenzen von:

	f	f^{I}	f^{II}
März 17.	$-1^0\,18'\,40'',5$		
		$23'\,41'',9$	
„ 18.	$-0^0\,54'\,58'',6$		$0,1$
		$23'\,42'',0$	
„ 19.	$0^0\,31'\,16'',6$		$-0,3$
		$23'\,41'',7$	
„ 20.	$-0^0\,7'\,34'',9$		$-0,6$
		$23'\,41'',1$	
„ 21.	$+0^0\,16'\,6'',2$		$-1,0$
		$23'\,40'',1$	
„ 22.	$+0^0\,39'\,46'',3$		$-1,3$
		$23'\,38'',8$	
„ 23.	$+1^0\,3'\,25'',1$		

und interpolieren nochmals in der Mitte zwischen 20. und 21. März; dabei erhalten wir:

$$f\left(20 + \frac{w}{2}\right) = f(20) + \frac{1}{2} f^{I}\left(20 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} f^{II}(20)$$

$$= -0^0\,7'\,34,9'' + \frac{1}{2} \cdot \left\{23'\,41,1''\right\} - \frac{1}{8}\left\{-0,6''\right\} = 0^0 4'\,15'',6 = \text{der}$$

Deklination für 20. März 12^h.

Die Interpolation für 21. März 12^h liefert:

$$f\left(21 + \frac{w}{2}\right) = f(21) + \frac{1}{2} f^{I}\left(21 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} f^{II}(21)$$

$$= 0^0\,16'\,6'',2 + \frac{1}{2} \cdot \left\{23'\,40'',1\right\} - \frac{1}{8} \cdot \left\{-1'',0\right\} = 0^0\,27'\,56'',1.$$

Heft 1527

Preis des Heftes 25 Pfg.

Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Heft 12

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das Le

Nun haben wir:

		f	f^I
März	20. · · ·	$-0^0\ 7'\ 34'',9$	
			$11'50'',5$
„	20. 12^h	$0^0\ 4'\ 15'',6$	
			$11'50'',6$
„	21. · · ·	$0^0\ 16'\ 6'',2$	
			$11'49'',9$
„	21. 12^h	$0^0\ 27'\ 56'',1$	

Es ändert sich hienach die Deklination der Sonne in der Zeit vom 20. März bis 21. März 12^h fast ganz gleichmäßig; in der Zeit vom 20. März bis 20. März 12^h beträgt die Änderung $11'\ 50'',5$. Den Frühlingsanfang finden wir soviel Stunden nach 20. März als Zeit erforderlich zu einer Deklinationsänderung um $7'\ 34'',9$; dies sind aber

$$\frac{7'\ 34'',9 \cdot 12^h}{11'\ 50'',5} = 7^h\ 40^m\ 59^{sec.}$$

Unser Resultat lautet also: Die Sonne überschreitet den Himmelsäquator am 20. März $7^h\ 40^m\ 59^{sec.}$

4. Das Lagrangesche Interpolationsverfahren.

Frage 136. Wie läßt sich interpolieren, wenn die Differenzen der auf einanderfolgenden Argumente nicht unter einander gleich sind?

Antwort. In diesem Falle bedient man sich des von Lagrange angegebenen Verfahrens, welches wir an dem folgenden Beispiel erklären wollen; es liege vor die:

Aufgabe 289. Man hat durch Versuche gefunden, daß den Ladungen 700, 1000, 1200, 1600 Gramm Pulver bezüglich die Schußweiten 1080, 1450, 1700, 2100 m entsprechen und soll daraus bestimmen, welche Schußweiten den Ladungen 800, 900, 1100 Gramm zukommen.

Erkl. 92. Lagrange, geboren 1736 zu Turin, gestorben 1813 zu Paris, gab der

Auflösung. Wir setzen die Ladungen $x_1 = 700$, $x_2 = 1000$, $x_3 = 1200$, $x_4 = 1600$ und die Schußweiten $y_1 = 1080$, $y_2 = 1450$, $y_3 = 1700$ und $y_4 = 2100$. Der Ladung x_1 entspricht die Schußweite y_1, der Ladung x_2 die Schußweite y_2 usw. Nun soll allgemein der Ladung x Gramm Pulver eine Schußweite von y Meter zukommen. Hiebei wird der Wert

folgende Interpolationsformel in seinen 1795 erschienenen Leçons élémentaires sur les mathématiques.

von y abhängen von x, den Werten x_1, x_2, x_3, x_4 und den Werten y_1, y_2, y_3, y_4. Daher wollen wir setzen:

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4$$

unter der Annahme, daß hierin A_1, A_2, A_3, A_4 Größen sind, welche der Art von x abhängen, daß

für $x = x_1$ wird:	$A_1 = 1$,	$A_2 = 0$,	$A_3 = 0$,	$A_4 = 0$
„ $x = x_2$ „	$A_1 = 0$,	$A_2 = 1$,	$A_3 = 0$,	$A_4 = 0$
„ $x = x_3$ „	$A_1 = 0$,	$A_2 = 0$,	$A_3 = 1$,	$A_4 = 0$
„ $x = x_4$ „	$A_1 = 0$,	$A_2 = 0$,	$A_3 = 0$,	$A_4 = 1$;

Erkl. 93. Setzen wir:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

so muß sein:

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d \\ y_2 &= ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d \\ y_3 &= ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d \\ y_4 &= ax_4^3 + bx_4^2 + cx_4 + d \end{aligned}$$

Bei unserer Aufgabe handelt es sich offenbar darum, aus obigen fünf Gleichungen die 4 Größen a, b, c, d herauszuschaffen. Wie dies in einfacher Weise möglich ist, lehrt die höhere Algebra.

Erkl. 94. Der Leser wird gebeten, die Lagrangesche Interpolationsformel aufzustellen, wenn zu drei Argumenten x_1, x_2 und x_3 die entsprechende Werte y_1, y_2 und y_3 gegeben sind, und zu fünf Argumenten x_1 bis x_5 die Werte y_1 bis y_5. Dann dürfte es leicht sein, die Lagrangesche Formel in allgemeiner Form anzuschreiben, wenn n Argumente x_1 bis x_n mit den Werten y_1 bis y_n gegeben sind.

denn ist diese Bedingung erfüllt, so wird, wie die Aufgabe verlangt, für $x = x_1$ der Wert von $y = y_1$, für $x = x_2$ der Wert von $y = y_2$ usw. Damit für $x = x_1$ die Größen A_2, A_3 und A_4 verschwinden, muß jede derselben den Faktor $x - x_1$ enthalten; damit für $x = x_2$ die Größen A_1, A_3, A_4 zu null werden, muß jede den Faktor $x - x_2$ enthalten usw. Daher setzen wir:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\ A_2 &= a_2 (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \\ A_3 &= a_3 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \text{ u.} \\ A_4 &= a_4 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \end{aligned}$$

wo a_1, a_2, a_3, a_4 Größen bedeuten, welche wir zu bestimmen haben. Setzen wir diese Ausdrücke für A_1 bis A_4 in die erste Gleichung für y ein, so folgt:

$$\begin{aligned} y = {} & a_1 (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) y_1 \\ & + a_2 (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) y_2 \\ & + a_3 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) y_3 \\ & + a_4 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) y_4. \end{aligned}$$

Geben wir hier der veränderlichen Größe x den Wert x_1, so muß $y = y_1$ werden und wir erhalten durch den Wegfall der y_2, y_3 und y_4 enthaltenden Glieder einfach:

$$y_1 = a_1 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) y_1$$

und daher:

$$a_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

Setzen wir dagegen $x = x_2$, so folgt:

$$y_2 = a_2 (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)$$

und

$$a_2 = \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$x = x_3$ gibt:

$$y_3 = a_3 (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) y_2$$

und

$$a_3 = \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)};$$

endlich liefert $x = x_4$:

$$y_4 = a_4 (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

und

$$a_4 = \frac{1}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}.$$

Führen wir diese Werte oben in der Gleichung für y ein, so ergibt sich die Lagrangesche Interpolationsformel:

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} y_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} y_4 \quad \ldots \text{№ } 45$$

Gegeben ist nun:

$x_1 = 0{,}7$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1{,}2$ u. $x_4 = 1{,}6$ Kg
$y_1 = 1{,}08$, $y_2 = 1{,}45$, $y_3 = 1{,}7$ u. $y_4 = 2{,}1$ Km

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir hier:

$$y = \frac{(x - 1)(x - 1{,}2)(x - 1{,}6)}{(0{,}7 - 1)(0{,}7 - 1{,}2)(0{,}7 - 1{,}6)} \cdot 1{,}08 + \frac{(x - 0{,}7)(x - 1{,}2)(x - 1{,}6)}{(1 - 0{,}7)(1 - 1{,}2)(1 - 1{,}6)} \cdot 1{,}45 + \frac{(x - 0{,}7)(x - 1)(x - 1{,}6)}{(1{,}2 - 0{,}7)(1{,}2 - 1)(1{,}2 - 1{,}6)} \cdot 1{,}7 + \frac{(x - 0{,}7)(x - 1)(x - 1{,}2)}{(1{,}6 - 0{,}7)(1{,}6 - 1)(1{,}6 - 1{,}2)} \cdot 2{,}1 \text{ Kilometer.}$$

Für $x = 0{,}8$ Kg folgt $y = 1{,}19866\ldots$ Km
„ $x = 0{,}9$ „ „ $y = 1{,}323\ldots$ „
und „ $x = 1{,}1$ „ „ $y = 1{,}5766\ldots$ „

Die gesuchten Schußweiten sind hienach:
1199 *m*, 1323 *m* und 1577 *m*.

Wegen weiteren Ausführungen wird auf Erkl. 94 hingewiesen.

5. Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 290. Schalte zwischen 1 und 3 acht Glieder so ein, daß eine arithmetische Reihe I. Ordnung entsteht.

Aufgabe 291. Interpoliere in gleichen Abständen 12 Glieder zwischen 5 und 175.

Aufgabe 292. An einem Sommertag stieg das Thermometer von 5 Uhr morgens bis 3 Uhr nachmittags von 12° C bis 30° C. Es soll unter der Annahme, daß die Temperaturzahlen in jeder halben Stunde um gleichviel wuchsen, berechnet werden, wieviel Grad das Thermometer um $5\frac{1}{2}$ Uhr, 6 Uhr, $6\frac{1}{2}$ Uhr usw. bis $2\frac{1}{2}$ Uhr gezeigt habe.

Aufgabe 293. Während einer Flut, welche $5\frac{1}{4}$ Stunden dauert, steigt bei Cuxhaven die Elbe um 3 m. Gib an, um wieviel Meter die Elbe 4 Stunden nach Eintritt der Flut gestiegen ist, wenn vorausgesetzt wird, daß die während der Flut alle Viertelstunden gemessenen Höhen eine arithmetische Reihe I. Ordnung bilden.

Aufgabe 294. Zwischen je 2 auf einander folgenden Glieder der Reihe 1, 4, 9, 16 ... soll ein Glied eingeschaltet werden, daß wieder eine Reihe II. Ordnung entsteht. Wie heißt die neue Reihe, wie ihr allgemeines Glied, und wie die Summe der n ersten Glieder?

Aufgabe 295. Desgleichen sollen in der Reihe 3, 9, — 12, — 60 usw. zwischen je 2 auf einander folgende Glieder 3 neue zu interpolieren, daß wieder eine Reihe II. Ordnung entsteht; man bestimme die neue Reihe, das allgemeine Glied und die Summe der n ersten Glieder.

Aufgabe 296. Zwischen je zwei auf einander folgenden Glieder der Kubikzahlen 1, 8, 27, 64 ... sollen noch 4 Glieder eingeschaltet werden, daß die Reihe der Ordnung nicht geändert wird. Wie heißt die neue Reihe, und wie das allgemeine Glied derselben?

Aufgabe 297. Zwischen je zwei auf einander folgende Glieder der Reihe 1, — 17, 387, — 1557 sollen 2 Glieder so eingeschaltet werden, daß die Reihe der Ordnung nicht geändert wird. Wie heißt die neue Reihe und wie ihr allgemeines Glied?

Aufgabe 298. Reines Wasser siedet unter dem Druck von

5	Atmosphären	bei 152°
10	„	„ 180°
15	„	„ 200°
20	„	„ 213°.

Berechne daraus die Siedetemperaturen für 13 Atm. und 16 Atm.

Aufgabe 299. Für gesättigten Wasserdampf beträgt der Druck in mm der Quecksilbersäulen gemessen:

bei	0^0 ...	4 mm
„	20^0 ...	17 „
„	40^0 ...	55 „
„	60^0 ...	149 „
„	80^0 ...	354 „
„	100^0 ...	760 „

Wie groß ist der Druck für gesättigten Wasserdampf von 10^0, 30^0, 50^0, 70^0 und 90^0?

Aufgabe 300. Zu Wien beträgt die relative Feuchtigkeit im

Januar	März	Mai
84 %	73 %	67 %
Juli	Septbr.	Novbr.
71 %	76 %	84 %

Wie groß ist hienach die Feuchtigkeit in den Zwischenmonaten?

Aufgabe 301. In der geographischen Breite von $48^0,13$ (München) beträgt die Beschleunigung g der Schwerkraft 980,13 cm; in der Breite $48^0,20$ (Wien) ist $g = 980,88$ und in der Breite $48^0,83$ (Paris) ist $g = 980,96$. Berechne hieraus den Wert von g für die Breite $48^0,5$.

VI. Ueber unendliche Reihen.

I. Erläuternde Fragen mit Antworten über unendliche Reihen im allgemeinen.

Frage 137. Was ist unter einer unendlichen Reihe zu verstehen?

Antwort. Wir gehen aus von einer Folge von Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetz gebildet sind, z. B.:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$$

$$\text{oder } \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5} \cdots$$

$$\text{oder } \frac{a}{a+b}, \frac{a^2}{a+2b}, \frac{a^3}{a+3b}, \frac{a^4}{a+4b} \cdots$$

Eine solche Reihenfolge heißt eine Reihe; die einzelnen Zahlen, welche in der Reihe vorkommen, heißen die Glieder der Reihe. Da es wichtig ist, von jedem Glied anzugeben, welche Stelle es in der Reihe einnimmt, versieht man jedes Glied mit einem Stellenzeiger oder Index. Das Anfangsglied erhält den Index 0; wir bezeichnen es künftig allgemein mit u_0; das zweite Glied den Index 1, — wir bezeichnen es künftig allgemein mit u_1 —; das dritte den Index 2, seine allgemeine Bezeichnung sei u_2 usw. Der Stellenzeiger oder Index eines Gliedes der Reihe ist also die Zahl, welche angibt, die wievielte Stelle dasselbe nach dem Anfangsglied ein-

nimmt. Das Glied, welches mit dem Index n behaftet ist, wird das allgemeine Glied der Reihe genannt und soll künftig allgemein mit u_n bezeichnet werden. so daß wir dann die Reihe in der allgemeinen Form

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots u_n \ldots$$

erhalten.

Eine Reihe heißt unendlich, wenn ihr Bildungsgesetz so beschaffen ist, daß es ohne Grenzen angewendet werden kann, daß also zu jedem noch so großen Stellenzeiger n das entsprechende Glied u_n berechnet werden kann.

Aufgabe 302. Wie heißt das Bildungsgesetz und das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \frac{1}{4\cdot 5} \ldots ?$$

Auflösung. Hier haben wir:

$$\text{Anfangsglied } u_0 = \frac{1}{1\cdot 2}$$

$$\text{erstes Glied } u_1 = \frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\text{zweites Glied } u_2 = \frac{1}{3\cdot 4}$$

$$\text{drittes Glied } u_3 = \frac{1}{4\cdot 5}$$

. . . .

Jedes Glied dieser Reihe stellt hienach einen Bruch mit dem Zähler 1 dar und mit einem Nenner, der das Produkt von zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen ist; der erste Faktor ist um 1 größer als der Index des Gliedes, und der zweite Faktor ist um 2 größer als der Index.

Das allgemeine Glied u_n mit dem Index n lautet hienach:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Man sieht leicht, daß die Bildung neuer Glieder bis ins Unendliche fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 303. Desgleichen von der Reihe:

$$1,\ \frac{4}{5},\ \frac{9}{5^2},\ \frac{16}{5^3},\ \frac{25}{5^4}\ \ldots.$$

Auflösung. Wir setzen

$$u_0 = 1,\ u_1 = \frac{4}{5} = \frac{2^2}{5},\ u_2 = \frac{9}{5^2} = \frac{3^2}{5^2},$$

$$u_3 = \frac{16}{5^3} = \frac{4^2}{5^3},\ u_4 = \frac{25}{5^4} = \frac{5^2}{5^4};$$

dann wird:

$$u_5 = \frac{6^2}{5^5},\ u_6 = \frac{7^2}{5^6}\ \text{usw.}$$

Somit muß sein:

$$u_n = \frac{(n+1)^2}{5^n}.$$

Auch diese Reihe ist eine **unendliche**, weil n beliebig **groß angenommen** werden kann.

Aufgabe 304. Desgleichen von der Reihe:

$$x,\ -\frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{3},\ -\frac{x^4}{4}\ \ldots.$$

Auflösung. Hier haben wir:

$$u_0 = x$$

$$u_1 = -\frac{x^2}{2} = (-1)\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$u_2 = +\frac{x^3}{3} = (-1)^2\cdot\frac{x^3}{3}$$

$$u_3 = -\frac{x^4}{4} = (-1)^3\cdot\frac{x^4}{4};$$

daraus folgt:

$$u_4 = +\frac{x^6}{6} = (-1)^4\cdot\frac{x^5}{5}$$

$$u_5 = -\frac{x^6}{6} = (-1)^5\cdot\frac{x^6}{6}\ \text{usw.}$$

Somit muß sein:

$$u_n = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Frage 138. Welche Folgernng läßt sich aus diesen Beispielen ziehen?

Antwort. Eine unendliche Reihe ist vollständig bestimmt, wenn man ihr allgemeines Glied u_n als Funktion des Stellenzeigers n kennt.

Frage 139. Was versteht man unter der Summenreihe einer unendlichen Reihe?

Erkl. 95. In dem Beispiel der Aufgabe 302 erhalten wir:

$$s_0 = \frac{1}{1.2}$$

$$s_1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3}$$

$$s_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

In dem Beispiel der Aufgabe 304 wird

$$s_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \cdots + (-1)^n . \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Antwort. Wir betrachten eine unendliche Reihe u_0, u_1, u_2, u_3 u. s. f., deren Glieder sowohl positive als negative Zahlen sein können. Aus dieser Reihe bilden wir eine zweite Zahlenreihe, indem wir die Summe der 2, 3, 4 ... ersten Glieder nehmen. Wenn wir das erste Glied u_0 noch als erstes Glied s_0 der neuen Reihe hinzufügen, so erhalten wir:

$$s_0 = u_0$$

$$s_1 = u_0 + u_1$$

$$s_2 = u_0 + u_1 + u_2$$

$$s_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Da die gegebene Reihe unendlich ist, so ist offenbar auch die neue Reihe s_0, s_1, s_2 ... unendlich; wir nennen diese letzte Reihe die Summenreihe der gegebenen.

Frage 140. Welche Fälle können bei der Bildung der Summenreihe einer unendlichen Reihe auftreten?

Erkl. 96. Nehmen wir die unendliche Reihe $u_0 = 1$, $u_1 = 1/2$, $u_2 = 1/4$, $u_3 = 1/8, \ldots$, so wird:

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 1 + 1/2 = 1{,}5$$

$$s_2 = 1 + 1/2 + 1/4 = 1{,}75$$

$$s_3 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 1{,}875$$

$$s_4 = 1\,1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 1{,}9375$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Je größer wir den Stellerzeiger n nehmen, desto größer wird s_n; aber die Glieder der

Antwort. Wenn wir in der Summenreihe s_0, s_1. $s_2 \ldots s_n$ die Bildung der Glieder sehr lang fortsetzen, also die Zahl n beliebig groß werden lassen, so kann der I. Fall eintreten, daß alle Glieder der Summenreihe endlich und kleiner als eine bestimmte endliche Zahl z ausfallen, daß ferner die Unterschiede zwischen zwei auf einander folgenden Gliedern immer kleiner und kleiner werden. Die Glieder der Reihe s_0, s_1, $s_2 \ldots s_n$ nähern sich, wenn n

Summenreihe bleiben alle von endlicher Größe, wie groß wir auch n wählen, und ihre Unterschiede verkleinern sich; man sieht, daß die Glieder, wenn n über alle Grenzen hinaus wächst, sich der Grenze 2 nähern.

Nehmen wir dagegen:

$u_0 = 1,\ u_1 = {}^1/_2,\ u_2 = {}^1/_3,\ u_3 = {}^1/_4 \ldots,$

so folgt:

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 1 + {}^1/_2 = 1{,}5$$
$$s_2 = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_3 = 1{,}83\ldots$$
$$s_3 = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_4 = 2{,}083\ldots$$
$$s_4 + 1 + {}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_4 + {}^1/_5 = 2{,}283\ldots$$
$$s_5 = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_4 + {}^1/_5 + {}^1/_6 = 2{,}45$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Fortsetzung dieser Summierung wird lehren, daß s_n desto größer wird, je größer wir n wählen; lassen w r n über alle Grenzen hinaus wachsen, so wird s_n unendlich groß.

Als drittes Beispiel wählen wir

$u_0 = 1,\ u_2 = -1,\ u_3 = +1,\ u_4 = -1$ usw.;

hier erhalten wir:

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 1 - 1 = 0$$
$$s_2 = 1 - 1 + 1 = +1$$
$$s_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \text{ usw,}$$

Alle geraden Glieder der Summenreihe sind $= +1$ und alle ungeraden Glieder $= 0$.

unbegrenzt wächst, **einer ganz bestimmten Grenze** s, welche unter der festen Zahl z liegt.

Ferner kann der II. **Fall** eintreten, daß mit zunehmendem Wert von n die Glieder der Summenreihe fortwährend wachsen, und wenn n über alle Grenzen hinausgeht, **alle unendlich groß** werden.

Endlich kommt noch der III. **Fall** vor, daß für ein unaufhörlich wachsendes n die Glieder der Summenreihe sich weder einer bestimmten Grenze nähern, noch unendlich groß werden, sondern abwechselnd bestimmte endliche Werte a und b annehmen.

Frage 141. Was versteht man unter einer **konvergenten unendlichen Reihe** und deren **Summe**?

Antwort. Falls in der unendlichen Reihe $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n \ldots$ die Größe $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, also das $n^{\underline{te}}$ Glied der Summenreihe sich **einer bestimmten Grenze** s nähert, wenn der Stellenzeiger n über alle Grenzen hinaus wächst, so heißt die gegebene Reihe **konvergent**. Diese Grenze nennt man dann die **Summe** der gegebenen Reihe. Dies wird geschrieben:

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \text{ ad infinitum}$$

oder

$$s = \operatorname*{Limes}_{n=\infty} s_n \text{ oder}$$

$$s = \sum_0^\infty {}^n a_n$$

Erkl. 97. In der Reihe $1, {}^1/_2, {}^1/_4, {}^1/_8 \ldots$ der vorigen Erkl. nähert sich s_n, wenn wir n über alle Grenzen hinaus wachsen lassen, der Grenze 2; die Reihe ist also **konvergent** und unter ihrer Summe s verstehen wir diesen Grenzwert 2; es ist also

$$s = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + \cdots \text{ ad infinitum}$$

oder

$$\operatorname*{Limes}_{n=\infty} s = 2.$$

Erkl. 98. Die unendliche Reihe

$$\frac{2}{10^1}\quad \frac{3}{10^2}\quad \frac{4}{10^3}\quad \frac{2}{10^4}\quad \frac{3}{10^5}\quad \frac{4}{10^6}\ \ldots$$

ergibt

$$s_0 = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$$s_1 = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} = 0{,}23$$

$$s_2 = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{4}{10^3} = 0{,}234$$

$$s_3 = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} = 0{,}2342$$

. . . .

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommen wir der Summe s der unendlichen Reihe, d. h. dem Wert $\frac{234}{999}$ beliebig nahe, denn aus der Lehre von den periodischen Dezimalbrüchen ist bekannt, daß $0{,}234234\ldots = \frac{234}{999}$ ist.

Wenn die unendliche Reihe u_0, u_1, $u_2 \ldots$ konvergent ist, so kann man ihre Summe s bis auf jeden beliebigen Grad von Genauigkeit berechnen; man braucht nur die Summenreihe s_0, s_1, $s_2 \ldots$ so lange fortzusetzen bis der Stellenzeiger hinlänglich groß ist. Hierauf beruht die häufige Anwendung der konvergenten unendlichen Reihen.

Frage 142. Welche Reihen heißen divergent, und was ist über deren Summen zu sagen?

Erkl. 99. In der Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$$

der Erkl. 97 wird s_n immer größer mit zunehmendem Stellenzeiger n; wächst dieser ins Unbegrenzte, so bekommen auch die zugehörigen Glieder s_n Werte von unermeßlicher Größe; daher ist die vorgelegte Reihe divergent. Wir schreiben dies:

$$s = \text{Limes } s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

für $n = \infty$, ist unendlich oder

$$\text{Limes}_{n=\infty} s_n = \infty$$

Antwort. Wenn in der unendlichen Reihe u_0, u_1, u_2 usw. die Glieder s_n der Summenreihe für hinlänglich große n über jede endliche Zahl hinauswachsen, so heißt die vorgelegte erste Reihe divergent. Die Gesamtheit der Zahlen u_n hat in diesem Fall keine Summe. Man schreibt dann wohl auch

$$\text{Limes}_{n=\infty} s_n = \infty \quad \text{oder} \quad \sum_0^\infty{}_n\, a_n = \infty.$$

Hier bedeutet das Zeichen ∞ nicht eine bestimmte Zahl, sondern es deutet nur an, daß die Zahlen s_n über jede endliche Zahl hinauswachsen, wenn n unbegrenzt zunimmt.

Frage 143. Welche unendliche Reihen heißen uneigentlich divergent?

Erkl. 100. Die Ausdrücke Konvergenz und Divergenz stammen vom lateinischen Zeitwort vergo, vergere = neigen, wenden, kehren.

Antwort. Tritt bei der Bildung der Summenreihe einer unendlichen Reihe u_0, u_1, $u_2 \ldots$ der III. Fall der Frage 140 ein, daß bei hinlänglich großem Stellenzeiger n die Glieder s_n der Summenreihe abwechselnd bestimmte endliche Werte

Erkl. 101. Oszillieren kommt vom lateinischen Zeitwort oscillo, oscillare = schaukeln.

annehmen, so heißt die Reihe u_0, u_1, $u_2 \ldots$ uneigentlich divergent oder oszillierend; in diesem Fall kann von einer Summe der unendlichen Reihe nicht die Rede sein, wie aus dem III. Beispiel der Erkl. 97 klar hervorgeht.

Frage 144. Was versteht man unter dem Rest einer unendlichen Reihe?

Antwort. Handelt es sich um die unendliche Reihe

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

bis ins Unendliche, so können wir — n als eine bestimmte endliche Zahl gedacht — die $n+1$ ersten Glieder zusammenfassend, setzen:

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Dann bleibt noch zu berücksichtigen die Größe

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

bis ins Unendliche, wenn

$$s = s_n + R_n$$

sein soll.

Die Größe R_n nennen wir den Rest de· Reihe. Der Rest der unendlichen Reihe ist also die Summe derjenigen Glieder, welche vernachlässigt werden, wenn man die Reihe nach dem bestimmten Glied u_n abbricht.

Frage 145. In welcher Beziehung steht der Rest zur Konvergenz und Divergenz der Reihe?

Antwort. Setzen wir voraus, daß der Index n eine endliche Zahl sei, so folgt aus

$$s = s_n + R_n,$$

daß die Größe R_n eine bestimmte endliche Zahl ist, wenn die vorliegende Reihe konvergiert. Ebenso folgt, daß R_n unendlich groß wird, wenn die Reihe divergiert.

Dieser Satz läßt sich umkehren: Die gegebene Reihe konvergiert, wenn der Rest R_n, der zu einem bestimmten endlichen n gehört, eine bestimmte endliche Zahl ist; trifft dies nicht zu, so ist die Reihe divergent.

Frage 146. Wie groß ist in einer konvergenten unendlichen Reihe der Rest R_n, wenn die Zahl n unendlich groß gewählt wird?

Antwort. Da s der Grenzwert ist, dem sich die Summe s_n unbegrenzt nähert, wenn n die Reihe der ganzen Zahlen bis ins Unendliche durchläuft, so muß für

$$n = \infty$$

$$\text{Limes}\, s_n = s$$

sein, oder Limes $(s - s_n) = 0$ oder

$$R_n = 0$$

d. h. wenn d e Reihe konvergiert, so ist, falls bei der Summierung eine ins Unendliche wachsende Anzahl von Gliedern berücksichtigt wird, der Rest der Reihe gleich Null.

Frage 147. Was bedeutet starke, was schwache Konvergenz?

Antwort. Eine Reihe konvergiert stark, wenn man verhältnismäßig wenig Glieder zu addieren braucht, um der Summe der unendlichen Reihe nahe zu kommen; ist dagegen die Addition über eine größere Anzahl von Gliedern auszudehnen, so nennt man die Reihe schwach konvergent. Mit andern Worten heißt dies: eine Reihe konvergiert um so stärker, je kleiner n zu sein braucht, um den Rest

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

verschwindend klein zu machen.

Frage 148. Wie verhalten sich die arithmetischen Reihen inbezug auf Konvergenz und Divergenz?

Antwort. Alle unendlichen arithmetischen Reihen sind divergent, denn die Summenformeln, welche wir früher für diese Reihen entwickelt haben, zeigen unmittelbar, daß die Summe mit wachsender Gliederzahl n fortwährend steigt und ins Unendliche geht, wenn n unendlich groß wird.

Daraus folgt, daß die arithmetischen Reihen sämtlich divergieren und aus den folgenden Betrachtungen ausscheiden.

---

2. Von der Konvergenz und Divergenz der geometrischen Reihen.

Frage 149. Welche Reihe heißt eine geometrische?

Erkl. 102. Da die geometrischen Reihen schon in Kleyer, Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen ausführlich behandelt worden sind, werden an dieser Stelle nur diejenigen Begriffe und Formeln wiederholt, welche für das Verständnis der folgenden Fragen unbedingt notwendig sind.

Antwort. Eine geometrische Reihe ist eine geordnete Folge von Zahlen, in der jede Zahl, dividiert durch die vorangehende, denselben Quotienten ergibt. Bezeichnen wir die Glieder dieser Reihe mit $u_0, u_1, u_2 \ldots$ und den konstanten Quotienten mit q, so muß sein:

$$\frac{u_1}{u_0} = q, \quad \frac{u_2}{u_1} = q, \quad \frac{u_3}{u_2} = q \text{ usw.}$$

also auch $u_1 = u_0 q$, $u_2 = u_0 q^2$, $u_3 = u_0 q^3 \ldots$ und das allgemeine Glied: $u_n = u_0 q^n$.

Als Beispiele führen wir an:

$$3, 6, 12, 18 \ldots;$$

ferner $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$ und

$$5, -15, +45, -135, +405 \ldots$$

Je nachdem q positiv oder negativ ist, haben die Glieder übereinstimmende oder abwechselnde Vorzeichen. Je nachdem ferner der absolute Wert von q größer oder kleiner als 1 ist, steigt oder fällt die Reihe.

Geht der Stellenzeiger u_n nicht über eine bestimmte endliche Zahl hinaus, so ist die Zahl der Glieder eine beschränkte; wächst dagegen n über alle Grenzen hinaus, so ist die geometrische Reihe eine unendliche.

Frage 150. Wie groß wird in der geometrischen Reihe

$$a,\ aq,\ aq^2 \cdots + aq^u$$

die Summe s_n der $n+1$ ersten Glieder?

Antwort. Da

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n \text{ ist, so folgt} \\ qs_n &= \phantom{a + {}} aq + aq^2 + \cdots + aq^n + aq^{n+1} \\ \hline s_n - qs_n &= a - aq^{n+1} \\ s_n(1-q) &= a - aq^{n+1} \text{ und} \\ s_n &= \frac{a}{1-q} - \frac{a \cdot q^{n+1}}{1-q} = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} \end{aligned}$$

Frage 151. Welche unendliche geometrische Reihen sind stets divergent?

Erkl. 103. Für $a = 2$ und $q = 1^1/_2$ erhalten wir die Reihe

$$u_0 = 2,\quad u_1 = 2 \,.\, 1^1/_2 = 3,\quad u_2 = 3 \,.\, 1^1/_2 = 4^1/_2,$$
$$u_3 = 4^1/_2 \,.\, 1^1/_2 = 6^3/_4 \text{ usw.}$$

Hier wird $s_n = \dfrac{2(1 - 1^1/_2{}^n)}{1 - 1^1/_2} = 4(1^1/_2{}^n - 1)$

und es ist leicht zu sehen, daß

$$s_n = \lim_{n=\infty} s_n = \infty$$

wird; daß also die vorgelegte Reihe divergiert.

Erkl. 104. Für $a = 10$ und $q = -1{,}2$ folgt:

$$u_0 = 10,\quad u_1 = -10 \,.\, 1{,}2 = -12,$$
$$u_2 = 10 \,.\, 1{,}2^2 = +14{,}4,$$
$$u_3 = -10 \,.\, 1{,}2^3 = -17{,}28 \text{ usw.}$$

Antwort. Aus der letzten Formel ergibt sich der folgende sehr wichtige **Satz:** Wenn in einer unendlichen geometrischen Reihe der Quotient q, absolut genommen, gleich 1 oder größer als 1 ist, so ist die Reihe stets **divergent.**

Denn nehmen wir q als positive Zahl größer als 1 an, so nehmen die Glieder $u_0 = a$, $u_1 = aq$, $u_2 = aq^2$, $u_3 = aq^3 \ldots$ usw. mit wachsendem Index fortwährend zu; daher muß auch die Summe

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n,$$

wenn n unendlich genommen wird, unendlich groß sein.

Geben wir dem Quotienten q den Wert 1, so wird $u_0 = a$, $u_1 = a$, $u_2 = a \ldots$, somit $s_n = na$; für $n = \infty$ folgt dann $s = \infty \cdot a = \infty$.

Daraus erhalten wir:

$$s_0 = u_0 = 10,\ s_1 = u_0 + u_1 = 10 - 12 = -2,$$
$$s_2 = u_0 + u_1 + u_2 = -2 + 14{,}4 = 12{,}4,$$
$$s_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 12{,}4 - 17{,}22 = -4{,}88$$
usw.

Weiter folgt $s_n = \frac{10}{11{,}2}\left\{1 - (-1{,}2)^n\right\}$

Die Glieder der Summenreihe sind daher abwechselnd positiv und negativ; ihr absoluter Betrag nimmt mit n fortgesetzt zu; somit oszilliert die Reihe oder ist uneigentlich divergent.

Wählen wir nun $q = -1$, so erhalten wir:

$$u_0 = a,\ u_1 = -a,\ u_2 = +a,\ u_3 = -a \ldots$$
also $s = a - a + a - a \ldots$

d. h. die Reihe oszilliert zwischen a und 0.

Nehmen wir endlich $q = -f$, wo f eine Zahl größer als 1 sein soll, so wird

$$u_0 = a,\ u_1 = -af,\ u_2 = +af^2,$$
$$u^3 = -af^3 \ldots;$$

bei abwechselnden Vorzeichen nehmen die absoluten Werte der Glieder unbegrenzt zu, daher wird

$$s_n = a(1 - f + f^2 - f^3 + \cdots \pm f^n)$$

mit wachsendem n hin- und herspringen und für $n = \infty$ keinen bestimmten endlichen Grenzwert liefern. In allen genannten vier Fällen divergiert hienach die geometrische Reihe.

Frage 152. Unter welcher Bedingung konvergiert eine unendliche geometrische Reihe und wie groß ist der Grenzwert der Summe?

Antwort. Es gilt der sehr wichtige **Satz II:** Eine unendliche geometrische Reihe, deren Quotient absolut kleiner als 1 ist, ist stets konvergent und die Summe hat den Grenzwert

$$s = \frac{a}{1-q}$$

Denn nehmen wir $q = \frac{1}{z}$, wo z eine positive Zahl größer als 1 ist, dann wird q selbst zwischen 0 und 1 liegen müssen. Die Glieder

$$u_0 = a,\ u_1 = \frac{a}{z},\ u_2 = \frac{a}{z^2},\ u_3 = \frac{a}{z^3}$$

usw. sind alle positiv, und je größer der Index n wird, desto kleiner die Glieder; für $n = \infty$ folgt

$$u_\infty = \frac{a}{z^n} = \frac{a}{\infty} = 0.$$

Yarrar ... (1528-32)

Heft 1528	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Heft 13

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist

Erkl. 105. Nehmen wir $a = 5$ und $q = 0,9$ an, also $z = {}^{10}/_9$, so folgt $u_0 = 5$; $u_1 = 4,5$; $u_2 = 4,05$; $u_3 = 3,645$ usw.

$$s_n = \frac{5}{0,1} - \frac{5 . 0,9^{n+1}}{0,1} = 50 - 50 . 0,9^{n+1}$$

und für $n = \infty$: $s = 50$.

Erkl. 106. Für $a = 5$ und $q = -0,9$ folgt

$u_0 = 5$; $u_1 = -4,5$; $u_2 = +4,05$; $u_3 = -3,645$ usw.

$$s_n = \frac{5}{1,9} - (-1)^{n+1} . \frac{5 . 0,9^{n+1}}{1,9}$$

und für $n = \infty$:

$$s = \frac{5}{1,9} = \frac{50}{19}$$

Aus der Summenformel

$$s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a q^{n+1}}{1-q}$$

erhalten wir für $n = \infty$, da

$$\lim_{n=\infty} q^{n+1} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

wird,

$$s = \lim_{n=\infty} s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a \cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Geben wir ferner dem Quotienten q den Wert $-\frac{1}{z}$, wobei z wieder eine positive Zahl größer als 1 sein soll, so folgt $u_0 = a$, $u_1 = -\frac{a}{z}$, $u_2 = +\frac{a}{z^2}$, $u_3 = -\frac{a}{z^3} \cdots$ Wir sehen daraus, daß bei wechselndem Vorzeichen die absoluten Beträge der Glieder stets abnehmen; für $n = \infty$ folgt:

$$\underset{n=\infty}{u_n} = \pm \lim_{n=\infty} \frac{a}{z^n} = \pm \frac{a}{\infty} = 0.$$

In der obigen Summenformel wird für $n = \infty$

$$\lim_{n=\infty} q^{n+1} = \lim_{n=\infty} \pm \frac{1}{z^{n+1}} = \pm \frac{1}{\infty} = 0,$$

d. h. die Summe s_n strebt für $n = \infty$ auch der Grenze $s = \frac{a}{1-q}$ zu, weil das II. Glied $\frac{a q^{n+1}}{1-q}$, für $n = \infty$, wegfällt.

Aufgabe 305. Bilde die Summe der unendlichen Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

bis ins Unendliche.

Auflösung. Hier ist zu setzen $a = 1$, $q = {}^1/_2$ und $n = \infty$. Da $q < 1$ ist, so konvergiert die Reihe und es wird $s = \frac{1}{1 - {}^1/_2} = 2$.

Aufgabe 306. Ebenso für

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$$

Auflösung. Da $a=1$ und $q=-1/2$ folgt als Summe der konvergenten Reihe für $n=\infty$:

$$s=\frac{1}{1-(-1/2)}=\frac{1}{1^1/_2}=\frac{2}{3}.$$

Aufgabe 307. Ebenso für

$$1+x+x^2+x^3+\cdots$$

Auflösung. Hier müssen wir setzen $a=1$ und $q=x$, die Reihe konvergiert nur für Werte von x zwischen $+1$ und -1 und liefert die Summe $s=\frac{1}{1-x}$.

Aufgabe 308. Ebenso für

$$1-z+z^2-z^3+\cdots$$

Auflösung. Da $a=1$ und $q=-z$ ist, konvergiert die Reihe nur für Werte von z zwischen 0 und 1 und liefert dann für $n=\infty$:

$$s=\frac{1}{1-(-z)}=\frac{1}{1+z}.$$

Aufgabe 309. Welches ist die Konvergenzbedingung der unendlichen Reihe

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots?$$

Auflösung. Nehmen wir $u_0=0$, $u_1=x$, $u_2=2x^2$, $u_3=3x^3$ u. s. f., so wird das allgemeine Glied $u_n=nx^n$. Nun folgt für einen endlichen Wert von n:

$$\begin{aligned}
s_n &= x+2x^2+3x^3+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n\\
xs_n &= \phantom{x+{}} x^2+2x^3+\cdots+(n-2)x^{n-1}+(n-1)x^n+nx^{n+1}\\
\hline
(1-x)\cdot s_n &= x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-2}+x^n-nx^{n+1}\\
x(1-x)s_n &= \phantom{x+{}} x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n+x^{n-1}-nx^{n-2}
\end{aligned}$$

Die Subtraktion gibt:

$$(1-x)(1-x)s_n=x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2};$$

daraus erhalten wir nun:

$$s_n=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

Nehmen wir nun den absoluten Wert von x kleiner als 1 an, so wird für ein unendlich großes n

jede der beiden Potenzen x^{n+1} und x^{n+2} gegen Null konvergieren; da aber jede derselben mit einem unendlich großen Faktor verbunden ist; so muß erst untersucht werden, ob die beiden Größen $(n+1)x^{n+1}$ und nx^{n+2} für $n=\infty$ verschwinden. Die Differenzialrechnung weist nach, daß dies wirklich zutrifft. (Siehe Haas, Differenzialrechnung II. Teil pag. 115). Daraus schließen wir, daß unsere Reihe für Werte von x zwischen $+1$ und -1 konvergiert und als Summe $\frac{x}{(1-x)^2}$ ergibt. Eine andere Beweisführung liefern die später folgenden allgemeinen Konvergenzregeln.

Frage 153. Warum gehören die **periodischen Dezimalbrüche auch** zu den konvergenten geometrischen Reihen?

Antwort. Wir nehmen den Dezimalbruch $b=0,\ z_1 z_2 z_3 z_1 z_2 z_3 \ldots$, der die Periode $z_1 z_2 z_3$ hat. Seine Bedeutung ist dann:

$$b=\frac{z_1 z_2 z_3}{10^3}+\frac{z_1 z_2 z_3}{10^6}+\frac{z_1 z_2 z_3}{10^9}+\cdots \text{ ad infinitum}$$

oder

$$b=\frac{z_1 z_2 z_3}{10^3}\left\{1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\cdots\cdots\right\}$$

Erkl. 107. Für $b=0{,}475475\ldots.$ mit der Periode 475 folgt:

$$b=\frac{475}{10^3}+\frac{475}{10^6}+\frac{475}{10^9}+\cdots$$

$$=\frac{475}{10^3}\left\{1+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{475}{10^3}\cdot\frac{1}{1-{}^1\!/_{10^3}}=\frac{475}{10^3}\cdot\frac{10^3}{999}=\frac{475}{999}$$

In der Klammer haben wir die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe mit $a=1$ und $q=\frac{1}{10^3}$; ihr Wert ist nach der Frage 152 $=\frac{1}{1-{}^1\!/_{10^3}}=\frac{10^3}{999}$.

Hienach wird:

$$b=\frac{z_1 z_2 z_3}{999}.$$

Ebenso geht die Rechnung, wenn die Periode mehr oder weniger Stellen hat. Wir sehen daraus, daß die bekannte Verwandlung

eines periodischen Dezimalbruches in einen gewöhnlichen Bruch im Grunde nichts anderes ist, als die Bildung der Summe einer unendlichen geometrischen Reihe.

Frage 154. Warum ist auch ein nichtperiodischer unendlicher Dezimalbruch die Summe einer konvergenten geometrischen Reihe?

Antwort. Als Beispiel nehmen wir den unendlichen Dezimalbruch, der sich als Differenz der Zahlen π und 3 ergibt, also 0,141592685.... Anders angeschrieben lautet er:

$$\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\cdots$$

Bilden wir die zugehörige Summenreihe:

$$s_0=\frac{1}{10},\quad s_1=\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2},$$

$$s_2=\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{1}{10^3}\text{ usw.},$$

so sehen wir, daß ihre Glieder fortwährend wachsen, daß aber alle kleiner als 0,2 bleiben. Daraus folgt, daß s_n für ein sehr großes n sich einem bestimmten Grenzwert s nähert, und die obige Reihe

$$\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\cdots$$

konvergent ist.

---

3. Sätze über die Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen mit lauter positiven Gliedern.

Frage 155. Wenn die unendliche Reihe $u_0+u_1+u_2+\cdots$ lauter endliche positive Glieder hat, ist für ihre Konvergenz welche Bedingung notwendig?

Antwort. Da u_0, u_1, u_2 usw. lauter endliche positive Zahlen sind, so müssen in der zugehörigen Summenreihe $s_0=u_0$, $s_1=u_0+u_1$, $s_2=u_0+u_1+u_2$ usw. die Glieder s_0, s_1, s_2 u. s. f. fortwährend größer werden. Man sieht nun leicht, daß wenn die Glieder der gegebenen Reihe immer wachsen oder von

einem bestimmten Glied an gleiche Werte erhalten, die Glieder der Summenreihe ins Unbegrenzte steigen müßten. Die Größe

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

kann für ein über alle Grenzen hinausgehendes n nur dann einem Grenzwert s zustreben, wenn von einer angebbaren Stelle, wir sagen von u_m an, wo m eine endliche Zahl sein muß, jedes Glied u_{n+1} kleiner ist als das vorhergehende u_n für jedes $n > m$.

Frage 156. Reicht das Fallen der Reihe von einem endlichen Glied u_m an, wo m eine bestimmte endliche Zahl vorstellt, zur Konvergenz der Reihe aus?

Antwort. Wir setzen

$$s_m = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_m \text{ und}$$

$$R_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + \cdots \text{ ad infinitum}$$

Dann wird:

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \text{ad infinit.} = s_m + R_m$$

Da alle Glieder endlich sind, hat s_m einen endlichen Wert; die Konvergenz unserer Reihe hängt hienach nur von dem Rest R_m ab; konvergiert dieser, so tut es auch die ganze Reihe.

Daß zur Konvergenz des Restes das Fallen seiner Glieder ohne weitere Beschränkung nicht ausreicht, zeigt das Beispiel:

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots$$

Hier nehmen die Glieder vom ersten an ab, aber jedes einzelne übersteigt den Wert 1 und erst für $n = \infty$ würde $u_n = \frac{n+1}{n}$ auf den Wert 1 herunter sinken. Die Summe dieser Reihe steigt offenbar ins Unbegrenzte.

Soll die Reihe

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots$$

konvergieren, so müssen die Glieder fortgesetzt der Ar-

abnehmen, daß sie gegen null konvergieren; es muß

$$\operatorname*{Limes}_{n=\infty} u_n = 0$$

sein; denn würde kein Glied des Restes unter die Zahl ε, welche wir uns beliebig klein vorstellen, heruntergehen, so wäre R_m mehr als $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \cdots$ in infinitum, also sicher über jeden endlichen Wert wachsend.

Frage 157. Ist die vorhin genannte Bedingung für die Konvergenz der Reihe ausreichend?

Antwort. Wenn die vorhin genannte Vorbedindung erfüllt ist, so folgt daraus die Konvergenz der Reihe noch nicht. Die Abnahme der Glieder bis null von einer angebbaren endlichen Stelle ab, ist eine notwendige aber keine ausreichende Bedingung der Konvergenz. Wir wollen dies an zwei Beispielen nachweisen.

Frage 158. Konvergiert die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots ?$$

Antwort. Es ist:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > 8 \cdot \frac{1}{16}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \frac{1}{2^n + 3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} > 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

Vergleichen wir nun die Summe s der gegebenen Reihe:

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \cdots$$

mit der Summe s' der Reihe:

$$s' = 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots$$

oder mit

$$s' = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots = 1 + \infty \cdot \frac{1}{2} = \infty,$$

Erkl. 108. Die **Divergenz** der **harmonischen Reihe** hat Jakob Bernouilli 1689 nachgewiesen.

so muß $s > s'$ sein; da aber s' eine unendlich große Zahl ist, so muß auch s unendlich sein, d. h. **die harmonische Reihe divergiert**, obgleich ihre Glieder fortwährend abnehmen und

$$\operatorname*{limes}_{n=\infty} u_n = \frac{1}{n} = 0 \text{ wird.}$$

Frage 159. Konvergiert die unendliche Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots ?$$

Antwort. Für

$$u_0 = 0,\ u_1 = \frac{1}{\sqrt{1}},\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots$$

wird das allgemeine Glied

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Daraus folgt

$$\operatorname*{Limes}_{n=\infty} u_n = \operatorname*{Limes}_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Hienach ist die Vorbedingung für die Abnahme der Glieder bis gegen null erfüllt.

Setzen wir jetzt

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

so ist sicher

$$s_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{oder } s_n > n\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ oder } s_n > \sqrt{n}$$

Lassen wir jetzt n ins Unendliche wachsen, so folgt, weil $\sqrt{\infty} = \infty$ ist, daß auch

$$\text{Limes}_{n=\infty} s_n = \infty.$$

Die vorgelegte Reihe ist hienach divergent.

Frage 160. Welche Folgerung ergibt sich aus den beiden letzten Beispielen?

Erkl. 109. Nehmen wir als Beispiel

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots,$$

so können wir den Ausschnitt

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+30}} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots \frac{1}{2^{n+300}}$$

durch genügend große Wahl von n beliebig klein machen, somit konvergiert die Reihe.

Erkl. 110. Der Ausdruck

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots u_{n+r}$$

heißt der Cauchy'sche Ausschnitt nach dem Mathematiker Cauchy, geboren 1789 in Paris, gestorben 1857. Durch sein im Jahr 1821 erschienenes Werk Cours d'analyse ist er der Begründer der genauen Reihenlehre geworden.

Antwort. Zur Konvergenz von unendlichen Reihen, welche nur positive Glieder enthalten, genügt die Abnahme der Glieder gegen null nicht; es muß noch folgende weitere Bedingung erfüllt werden.

Wir schreiben unsere unendliche Reihe:

$$s = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+r}\} + u_{n+r+1} + u_{n+r+2} + \cdots$$

ins Unendliche.

Die notwendigende und hinreichende Bedingung für die Reihe lautet dann:

Die Summe

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+r}$$

muß lediglich durch die Wahl von n für jede Zahl r beliebig klein gemacht werden können. Oder anders augedrückt: Es muß möglich sein, in der unendlichen Reihe genügend weit draußen ein beliebig langes Stück herausschneiden, dessen Summe kleiner als j de angebbare Größe ist.

Frage 161. Wie läßt sich die vorige Bedingung herleiten?

Antwort. Wenn unsere Reihe $u_0 + u_1 + \cdots$ konvergieren soll, so muß sich die Größe s_n

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

mit unendlich wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze s nähern, folglich müssen auch die Größen

$$s - s_n,\ s - s_{n+1},\ s - s_{n+2}, .. s - s_{n+r}$$

für hinreichend große Werte von n beliebig klein werden. Das Gleiche muß dann auch der Fall sein für die Differenzen dieser Größen

$$s - s_n,\ s - s_{n+1} \ldots s - s_{n+r}.$$

Nun ist aber:

$$(s - s_n) - (s - s_{n+1}) = s_{n+1} - s_n = u_{n+1}$$

$$(s - s_n) - (s - s_{n+2}) = s_{n+2} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2}$$

$$(s - s_n) - (s - s_{n+3}) = s_{n+3} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(s - s_n) - (s - s_{n+r}) = s_{n+r} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+r}$$

Zur Konvergenz ist hienach notwendig, daß

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+r}$$

beliebig klein gemacht werden kann, wie groß auch r sein mag.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so sind die Differenzen

$$s_{n+r} - s_n$$

für hinreichend große Werte von n beliebig klein, wie groß auch r sein mag. Somit nähert sich s_n mit wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze, d h. die Reihe ist konvergent. Obige Bedingung ist demnach auch eine hinreichende.

Erkl. 111. Nehmen wir als Beispiel

$$\frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \cdots,$$

so ist

$$s_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}\left\{10 - \frac{1}{10^n}\right\}$$

und da bekanntlich der Grenzwert der Summenreihe $= \frac{9}{10}$ ist, so folgt:

$$s - s_n = \frac{1}{9 \cdot 10^n}$$

$$s - s_{n+r} = \frac{1}{9 \cdot 10^{n+r}}$$

$$s_{n+r} - s_n = \frac{1}{9 \cdot 10^n} - \frac{1}{9 \cdot 10^{n+r}} \text{ oder}$$

$$= \frac{1}{9 \cdot 10^n}\left\{1 - \frac{1}{10^r}\right\}$$

Da aber $s_{n+r} - s_n$ auch

$$= \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{10^r}$$

ist, so sieht man leicht, daß letztere Summe für ein ins Unendliche wachsendes n und ein beliebig großes r sich der Grenze null nähert.

Frage 162. Wie verhält sich eine unendliche Reihe $u_0+u_1+u_2+\cdots$, in welcher der Cauchy'sche Ausschnitt $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+r}$ auch für ein über alle Grenzen wachsendes n über einer endlichen Grenze g bleibt?

Antwort. Da wir in der Reihe $u_0+u_1+\cdots$ bis ins Unendliche unzählich viel solcher Ausschnitte bilden können, sie s llen durch die Buchstaben a_1, a_2, a_3 usw. ausgedrückt werden, so daß die Reihe durch

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+a_1+\cdots$$
$$+a_2+\cdots+a_3+\cdots$$

darstellbar ist, so müssen die Größen a, weil jede derselben größer als die endliche Größe g ist, eine unendlich große Summe ergeben; die vorgelegte Reihe ist demnach divergent.

Frage 163. Welchen Nachteil hat dieses wahre Kennzeichen der Konvergenz?

Antwort. Die Summierung des Cauchy'schen Ausschnittes

$$u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+r}$$

läßt sich nur in wenigen Fällen durchführen. Deshalb suchen wir jetzt bequemer zu handhabende Kennzeichen für die Konvergenz beziehungsweise Divergenz aufzustellen.

Frage 164. Auf welchem Weg gelangt man zu solchen Kennzeichen für die Konvergenz bezw. Divergenz einer unendlichen Reihe?

Antwort. Um über die Konvergenz bezw. Divergenz einer unendlichen Reihe zu entscheiden, vergleicht man dieselbe mit einer an'ern unendlichen Reihe, deren Konvergenz oder Divergenz bereits festgestellt ist.

Frage 165. Auf welche Sätze führt dieses Prinzip der Reihenvergleichung?

Antwort. Wir setzen voraus, daß die unendliche Reihe mit lauter positiven Gliedern

$$t_0+t_1+t_2+\cdots+t_n+\cdots$$

absolut sicher konvergiere; es sei ferner die unendliche Reihe mit lauter positiven Gliedern

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

zur Untersuchung vorgelegt. Dann läßt sich beweisen:

Satz I. Aus der bekannten Konvergenz der Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots$$

folgt die Konvergenz der zu untersuchenden Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$

wenn von einer bestimmten angebbaren Stelle an jedes Glieder der letzten Reihe **kleiner** ist als das entsprechende Glied der ersten Reihe.

Denn nehmen wir an, daß vom 10^{ten} Glied an die u_n kleiner seien als die t_n, also $u_{10} < t_{10}$, $u_{11} < t_{11}$, $u_{12} < t_{12}$ usw., so folgt:

$$u_{10} + u_{11} + u_{12} + \cdots < t_{10} + t_{11} + t_{12} + \cdots$$

d. h. die Summe auf der linken Seite ist kleiner als eine angebbare en liche Zahl. Wenn wir nun bilden:

$$s = (u_0 + u_1 + \cdots + u_9) + (u_{10} + u_{11} + u_{12} + \cdots),$$

so ist $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ auch eine endliche Summe; wird zu ihr die zweite endliche Summe

$$u_{10} + u_{11} + \cdots$$

addiert, so muß die Gesamtsumme s ebenfalls endlich sein. Mit andern Worten: die zu untersuchende Reihe konvergiert.

Nun setzen wir voraus, daß die unendliche Reihe mit lauter positiven Gliedern $t_0 + t_1 + t_2 + \cdots$ sicher divergiere, dann läßt sich zeigen:

Satz II. Aus der Divergenz der Reihe $t_0 + t_1 + t_2 + \cdots$ folgt die Divergenz der zu untersuchenden Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ — beide Reihen sollen nur positive Glieder enthalten —, wenn von einer bestimmten Stelle an jedes Glied der letzteren Reihe **größer** ist als das entsprechende Glied der ersten Reihe.

Denn sind z. B. vom $8^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Gliede an die u_n größer als die entsprechenden Glieder t_n; ist also $u_8 > t_8$, $u_9 > t_9$, $u_{10} > t_{10}$ usw., so folgt:

$$u_8 + u_9 + u_{10} + \cdots > t_8 + t_9 + t_{10} + \cdots$$

Aus der Divergenz der Reihe $t_0 + t_1 + \cdots$ ergibt sich, daß auf der rechten Seite die Summe $t_8 + t_9 + t_{10} + \cdots$ unendlich groß sein muß; daher ist auch

$$u_8 + u_9 + u_{10} + \cdots$$

unendlich und ebenso

$$s = (u_0 + u_1 + \cdots + u_7) + (u_8 + u_9 + u_{10} + \cdots)$$

Mit anderen Worten: Unsere Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ **divergiert.**

Aufgabe 310. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \cdots$$

soll auf ihre Konvergenz bezw. Divergenz untersucht werden.

Auflösung. Wir schreiben die Glieder dieser Reihe in der **Form:**

$$u_0 = 1,\ u_1 = \frac{1}{2+1},\ u_2 = \frac{1}{4+1},$$

$$u_3 = \frac{1}{8+1},\ u_4 = \frac{1}{16+1} \cdots$$

und vergleichen diese Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

mit der nach Aufgabe 305 konvergenten Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

in welcher

$$t_0 = 1,\ t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = \frac{1}{4},\ t_3 = \frac{1}{8},$$

$$t_4 = \frac{1}{16} \cdots$$

Dann ergibt sich $u_0 = t_0$, $u_1 < t_1$, $u_2 < t_2$, $u_3 < t_3 \ldots$ Nach Satz I muß also die gegebene Reihe **konvergieren.**

Aufgabe 311. Desgleichen die Reihe:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$$

Auflösung. Hier ist

$$u_0=1,\ u_1=\frac{1}{2},\ u_2=\frac{2}{3},\ u_3=\frac{3}{4},$$

$$u_4=\frac{4}{5}\cdots u_n=\frac{n}{n+1}\cdots$$

Als Vergleichsreihe $t_0+t_1+t_2\ldots$ nehmen die ähnlich gebaute harmonische Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

welche nach der Frage 158 divergiert. Aus

$$t_0=1,\ t_1=\frac{1}{2},\ t_2=\frac{1}{3},\ t_3=\frac{1}{4}\cdots t_n=\frac{1}{n}$$

folgern wir:

$$u_0=t_0,\ u_1=t_1,\ u_2>t_2,$$
$$u_3>t_3,\ldots u_n>t_n\ldots$$

Nach Satz II muß also die zu untersuc'ende Reihe auch divergieren.

Aufgabe 312. Desgleichen die Reihe

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots$$

Auflösung. Wir unterscheiden die Fälle:

1. $k<0$; 2. $k=0$, 3. $0<k<+1$; 4. $k=+1$ und 5. $k>+1$.

Ist $k<0$, so können wir setzen $k=-\varkappa$, wo $\varkappa$ eine positive Zahl bedeutet, dann wird:

$$\frac{1}{n^k}=\frac{1}{n^{-\varkappa}}=n^\varkappa$$

und die Reihe geht über in

$$1^\varkappa+2^\varkappa+3^\varkappa+4^\varkappa+\cdots n^\varkappa+\cdots$$

Da in dieser Reihe die Glieder fortwährend wachsen bis $\infty^\varkappa$, so muß diese Reihe divergieren.

Für $k=0$ folgt $\frac{1}{n^k}=\frac{1}{n^0}=1$; hiemit geht die Reihe über in

$$1+1+1+1\ldots$$

und divergiert.

Nehmen wir k als echten Bruch, z. B. $^1/_3$, so wird

$$n^k = n^{1/3} \text{ und } \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{1/3}}.$$

Der Nenner $n^{1/3}$ ist hier kleiner als n, der Wert des Bruches $\frac{1}{n^{1/3}}$ hienach größer als der Bruch $\frac{1}{n}$. Zum Vergleich nehmen wir wieder die divergente harmonische Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

mit $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2} \cdots t_n = \frac{1}{n} \cdots$ während hier $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{1^{1/3}}$, $u_2 = \frac{1}{2^{1/3}} \cdots u_n = \frac{1}{n^{1/3}} \cdots$ ist. Man sieht $u_1 > t_1$, $u_2 > t_2 \ldots u_n > t_n$ ist; d. h. die vorgelegte Reihe divergiert für Werte von k zwischen 0 und 1.

Für $k = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe selbst, also Divergenz.

Für $k > 1$ schreiben wir:

$$\frac{1}{1^k} = \frac{1}{1^k}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}$$

$$4 \cdot \frac{1}{4^k} > \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k}$$

$$8 \cdot \frac{1}{8^k} > \frac{1}{8^k} + \frac{1}{9^k} + \cdots + \frac{1}{15^k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Summiert man beiderseits, so folgt:

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{4^{k-1}} + \frac{1}{8^{k-1}} + \cdots > \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{15^k}$$

Auf der rechten Seite erscheint unsere Reihe; links dagegen tritt die Reihe auf:

$$1+\frac{1}{2^{k-1}}+\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^3+\cdots$$

und diese geometrische Reihe ist nach Frage 153 konvergent für $\frac{1}{2^{k-1}}<1$, also für $k>1$. Hieraus folgt der **Satz:** Die Reihe

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots$$

muß für jeden Wert von $k>1$ konvergieren, während sie für jeden Wert von k, der $=1$ oder kleiner als 1 ist, divergiert.

Aufgabe 313. Welche der folgenden Reihen sind konvergent, welche divergent?

1. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$

2. $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3^4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4^4}}+\cdots$

3. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$

4. $1+\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}}+\frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4^2}}+\cdots$

Auflösung. Da in der ersten Reihe $k=2$ und in der zweiten Reihe $k=\frac{4}{3}$ ist, so konvergieren beide, während die beiden andern divergieren wegen $k=\frac{1}{2}$, beziehungsweise $k=\frac{2}{5}$.

Frage 166. Wenn wieder $t_0+t_1+t_2+\cdots$ eine konvergente unendliche Reihe ist, und $k_0, k_1, k_1\ldots$ irgend eine unendliche Reihe positiver Zahlen vorstellt, welche alle unter einer **endlichen** Grenze g bleiben, was gilt dann von der Reihe

$$k_0t_0+k_1t_1+k_2t_2+\cdots?$$

Erkl. 112. Wenn wir die Glieder irgend einer konvergenten Reihe, z. B. der zweiten der vorigen Aufgabe mit beliebigen end-

Antwort. Hier gilt der **Satz:** Die neue Reihe

$$k_0t_0+k_1t_1+k_2t_2+\cdots$$

muß auch **konvergent** sein.

Denn nehmen wir

$$s_n=t_0+t_1+t_2+\cdots+t_n \text{ und}$$
$$s_n'=k_0t_0+k_1t_1+k_2t_2+\cdots+k_nt_n$$

so muß, weil alle $k_0, k_1\ldots k_n$ kleiner als die endliche Zahl g sind:

$$s_n'<g(t_0+t_1+\cdots+t_n) \text{ also}$$
$$s_n'<g\cdot s_n \text{ sein.}$$

lichen Zahlen multiplizieren, so ist die neue Reihe ebenfalls *konvergent*, also z. B.

$$5+\frac{7}{\sqrt[3]{2^4}}+\frac{8}{\sqrt[3]{3^4}}+\frac{40}{\sqrt[3]{4^4}}+\cdots$$

Wenn nun aber alle s_n wegen der Konvergenz der Reihe $t_0+t_1+\cdots$ unter einer Grenze s bleiben, so müssen auch die Glieder s_n' der Summenreihe der II. Reihe unter Grenze gs bleiben. Demnach konvergiert auch die Reihe

$$k_0 t_0 + k_1 t_1 + \cdots$$

Frage 167. Zu welcher Folgerung führt der vorige Satz, wenn wir eine beliebige Anzahl der Faktoren $k =$ null und alle anderen gleich 1 annehmen?

Antwort. Da an der obigen Schlußweise keine Änderung erfolgt, wenn wir einzelne Faktoren $k=0$ und die anderen $=1$ nehmen, so muß die neue Reihe auch konvergieren; ihre Glieder sind aber lauter Glieder der Reihe $t_0+t_1+\cdots$, aus der eine beliebige Anzahl herausgenommen sind durch die gleich null gesetzten Faktoren k. Wir haben also den **Satz:** Die Summe aus irgend einem Teil einer konvergenten Reihe ist gleichfalls konvergent.

Frage 168. Wie läßt sich eine unendliche Reihe $u_0+u_1+u_2+\cdots$ mit lauter positiven Gliedern mit einer geometrischen Reihe vergleichen?

Antwort. Wir nehmen an, daß in der Reihe $u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$ von einem bestimmten Glied an der Quotient eines jeden Gliedes durch das vorangehende um eine endliche Größe kleiner als 1 sei, etwa kleiner als die unter 1 liegende Zahl q. Beginnt diese Voraussetzung mit dem n^{ten} Glied, so hat man:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q, \quad \text{also} \quad u_{n+1}<q\cdot u_n$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<q, \quad \text{„} \quad u_{n+2}<q\cdot u_{n+1}$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}<q, \quad \text{„} \quad u_{n+3}<q\cdot u_{n+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Diese Ungleichheiten werden nicht gestört, wenn man auf der rechten Seite den Faktor u_{n+1} durch

Farrar fund Bos c.

Heft 1532

Preis des Heftes 25 Pfg.

Der binomische und polynomische Lehrsatz

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärische Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysi Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); - aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathema Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hoc bau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspectiv Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Heft 14

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

die größere Zahl $q \cdot u_n$, den Faktor u_{n+2} durch die größere Zahl $q^2 \cdot u_n$ usw. ersetzt. Auf diese Art bekommen wir:

$$u_{n+1} < q \cdot u_n$$
$$u_{n+2} < q^2 u_n$$
$$u_{n+3} < q^3 u_n$$
$$\cdots\cdots$$

Durch Addition und Hinzufügung von u_n auf beiden Seiten ergibt sich jetzt:

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots < u_n + q u_n + q^2 u_n + \cdots$$

oder

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots < u_n (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)$$

Da aber $q < 1$ ist, so ist

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

eine abnehmende geometrische Reihe, deren Summe $= \frac{1}{1-q}$ ist (Siehe Frage 152). Hienach hat das mit u_n beginnende Stück unserer Reihe eine Summe kleiner als $\frac{u_n}{1-q}$; fügen wir noch das endliche Stück $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ hinzu, so folgt, daß die ganze zu untersuchende Reihe

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

eine endliche Summe geben muß, also konvergent ist. Daraus folgt **Satz I:** Wenn in der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ von einer angebbaren Stelle an der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ stets um eine endliche Größe kleiner ist als die Einheit, auch noch für $n = \infty$, so ist die Reihe konvergent.

Frage 169. Wie gestalten sich die Verhältnisse, wenn in der vorigen Reihe von einer angebbaren u_n an der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ größer als 1 oder $=1$ ist?

Antwort. Wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ größer als 1 ist, so muß u_{n+1} größer als u_n sein; da ebenso $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > 1$, so muß $u_{n+2} > u_{n+1}$ sein usw. bis ins Unendliche; die Reihe steigt von u_n an, und ist daher divergent. Daß auch Divergenz eintritt für $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, oder wenn

$$u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \cdots$$

springt von selbst in die Augen. Hienach haben wir den **Satz II:** Wenn in der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

von einer angebbaren Stelle an der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nicht **kleiner** ist als die Einheit, auch noch für $n = \infty$, so divergiert die Reihe.

Aufgabe 314. Untersuche die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

Auflösung. Wir nehmen

$$u_1 = \frac{x}{1},\quad u_2 = \frac{x^2}{2},\quad u_3 = \frac{x^3}{3},\ \ldots.$$

$$u_n = \frac{x^n}{n},\quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ \ldots$$

und erhalten

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = \frac{nx}{n+1}$$

Dieser Bruch bleibt kleiner als 1, wenn x kleiner als 1 ist und zwar bleibt er, $x < 1$ vorausgesetzt, auch dann noch kleiner als 1, wenn $n = \infty$ angenommen wird, weil limes $\frac{n}{n+1}$ für $n = \infty$ sich dem Wert 1 nähert. Daraus folgt, daß unsere Reihe konvergiert für alle positiven Werte von x, welche kleiner als 1 sind und divergiert,

wenn $x > 1$ ist. Im Fall, daß $x = 1$ ist, geht die Reihe über in

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

deren Divergenz schon in Frage 158 nachgewiesen worden ist.

Aufgabe 315. Untersuche die Reihe

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

Auflösung. Wenn wir wie früher $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$ mit $n!$ bezeichnen, so ist hier für $u_0 = 0$:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{1}{2!}, \quad u_3 = \frac{1}{3!} \cdots$$

$$u_n = \frac{1}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{\overline{n+1}!} \cdots$$

Dann folgt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{\overline{n+1}!} = \frac{1}{n+1}$$

z. B.

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{u_4}{u_3} = \frac{1}{4} \text{ usw.}$$

Der Quotient nimmt also mit wachsendem n von $\frac{1}{2}$ an fortwährend ab, bis er für $n = \infty$ den Grenzwert 0 erreicht; daher konvergiert die Reihe.

Aufgabe 316. Untersuche die Reihe

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Erkl. 113. Nehmen wir $x = 4$ an, so geht die Reihe über in

$$4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{6!} + \cdots$$

$$= 4 + 8 + 10^2/_3 + 10^2/_3 + 8^8/_{15} + 5^{31}/_{45} + \cdots$$

Die Reihe steigt also bis zum Glied u_3; u_4 wird $= u_3$ und von da ab fällt dann die Reihe.

Auflösung. Für $x = 1$ geht diese Reihe in die vorige konvergente über; somit muß auch die vorgelegte Reihe für $x = 1$ und noch vielmehr für $x < 1$ konvergieren. Um entscheiden zu können, ob auch für $x > 1$ Konvergenz eintritt, bilden wir

$$u_n = \frac{x^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{\overline{n+1}!}$$

und

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{\overline{n+1}!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$$

Ferner wird

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2;$$

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{4}{3} = 1^1/_3;$$

$$\frac{u_4}{u_3} = \frac{4}{4} = 1;$$

$$\frac{u_5}{u_4} = \frac{4}{5};$$

$$\frac{u_6}{u_5} = \frac{4}{6}$$

. . . . .

Man sieht, der Wert des Quotienten wird immer kleiner und erreicht für $n = \infty$ den Wert Null.

Dieser Quotient ist für jeden endlichen Wert von x von einer angebbaren Stelle ab $= 1$ und fällt von da ab, wenn n ins Unendliche wächst, bis Null. Hienach ist unsere Reihe für jeden endlichen Wert von x konvergent. Dasselbe trifft offenbar auch zu für die Reihe

$$1 + \frac{cx}{1} + \frac{(cx)^2}{2!} + \frac{(cx)^3}{3!} + \cdots,$$

in welcher c einen konstanten Faktor vorstellt. Auch sie konvergiert für jeden endlichen Wert der Veränderlichen x.

Frage 170. Wenn in einer unendlichen Reihe mit lauter positiven Gliedern der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bei unendlich wachsendem n sich einer bestimmten Grenze g nähert; wie gestalten sich denn die Bedingungen der Konvergenz und Divergenz?

Erkl. 114. Betrachten wir die Reihe

$$0{,}9 + \frac{0{,}9^3}{3} + \frac{0{,}9^5}{5} + \frac{0{,}9^7}{7} + \cdots \frac{0{,}9^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

mit $u_0 = 0$, $u_1 = 0{,}9$, $u_2 = \frac{0{,}9^3}{3}$, $u_3 = 0{,}9^5$..,

so gibt sie

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{0{,}9^2}{3};\quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{3 \cdot 0{,}9^2}{5},\quad \frac{u_4}{u_3} = \frac{5 \cdot 0{,}9^2}{7}$$

. . . .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1) \cdot 0{,}9^2}{2n+1}$$

Hier wachsen die Werte des Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ von $\frac{1}{3} \cdot 0{,}9^2$ nach und nach an, bis für $n = \infty$ die Grenze $g = 0{,}9^2$ erreicht wird. Die Konvergenz dieser Reihe ergibt sich schon daraus, daß $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ stets kleiner als 1 ist, auch für $n = \infty$.

Antwort. Da der Grenzwert g jedenfalls positiv ist, so kann g nur liegen zwischen 0 und 1, oder $= 1$ sein oder den Wert 1 übersteigen. — Nehmen wir den Fall, daß dieser Grenzwert g um eine angebbare Größe kleiner als 1 sei, so kann sich der Wert des Bruches $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dem Grenzwert g nähern entweder durch Wachstum von unten, d. h. von 0 aufwärts, oder durch Abnahme von oben, d. h. von 1 abwärts. Trifft das erstere zu, so sind die Bedingungen für die Konvergenz nach dem vorletzten Satz erfüllt. Ist dagegen g der Minimalwert von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für $n = \infty$, so müssen die vorangehenden Werte von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ größer als g sein; somit muß es in der Reihe eine angebbare Stelle geben, von welcher an der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner als eine bestimmte Zahl q ist, welche kleiner als 1 und größer

Erkl. 115. Nehmen wir die Reihe

$$1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\frac{11}{2^5}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{2n+1}{2^n}+\frac{2n+3}{2^{n+1}}+\cdots,$$

so erhalten wir mit

$$u_0=0,\ u_1=1,\ u_2=\frac{3}{2}\ \text{etc.}$$

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{3}{2},\ \frac{u_3}{u_2}=\frac{5}{2^2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{3.2}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{u_4}{u_3}=\frac{7}{2^3}\cdot\frac{2^2}{5}=\frac{7}{5.2}=\frac{7}{10}$$

. . . .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+3}{(2n+1).2}=\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

Der Wert des Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ fällt demnach von $\frac{3}{2}$ ab bis zu dem Grenzwert $g=\frac{1}{2}$ für $n=\infty$; wir sehen, daß schon vom zweiten Glied an der genannte Quotient kleiner als 1 ist; wenn wir $q=\frac{5}{7}$ annehmen nach der Annahme $1<q<g$, so würden wegen $\frac{u_3}{u_2}=\frac{5}{6}$ und $\frac{u_4}{u_3}=\frac{7}{10}$ alle Quotienten vom dritten Glied an aufwärts kleiner als q; der Index k im Beweis wäre hienach $=3$. Weil $g<1$ ist, muß die Reihe konvergieren.

als der Grenzwert g ist. Hat diese Stelle den Index k, so folgt:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}<q,\ \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}<q,\ \frac{u_{k+3}}{u_{k+2}}<q,$$
$$\frac{u_{k+4}}{u_{k+3}}<q,\ldots$$

Dies gibt

$$u_{k+1}<u_k\cdot q,\ u_{k+2}<u_{k+1}q,$$
$$u_{k+3}<u_{k+2}\cdot q$$

. . . .

Daher ist um so mehr:

$$u_{k+2}<u_kq^2,\quad u_{k+3}<u_kq^3,\ldots$$

Die Addition liefert jetzt:

$$u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}$$
$$+\cdots<u_k(1+q+q^2+q^3+\cdots)$$
$$<u_k\cdot\frac{1}{1-q}$$

Da dieser Ausdruck einen endlichen Wert hat, so muß auch $u_k+u_{k+1}+\cdots$ eine endliche Größe sein; fügen wir noch die endliche Summe $u_0+u_1+\cdots+u_{k-1}$ hinzu, so erhalten wir wieder eine endliche Summe; mit anderen Worten: die vorgelegte Reihe konvergiert.

Im Fall $g>1$ denken wir uns zwischen 1 und g den unechten Bruch q eingeschaltet, so daß q zwischen 1 und dem Grenzwert g liegt. Der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nähert sich von dem kleineren Wert 1 herauf einer über der Größe q liegenden Grenze g; demnach muß er von einer bestimmten Stelle an größer als q werden. Hat diese Stelle den Index k, so erhalten wir durch ähnliche Schlüsse wie oben:

$$u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots>u_k(1+q+q^2+\cdots)$$

Die geometrische Reihe

$$1+q+q^2+\cdots$$

muß aber weil $q > 1$ ist, divergieren; die Summe links ist hienach unendlich groß und dasselbe gilt auch von der ganzen Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

In dem Fall, daß sich der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dem Grenzwert 1 nähert, läßt sich keine bestimmte Stelle angeben, von welcher an der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner als 1 oder größer als 1 bleiben muß; die vorige Art der Untersuchung, deren Schwerpunkt in der Einschaltung einer bestimmten Größe q zwischen 1 und dem Grenzwert g liegt, versagt, wenn der Grenzwert $g = 1$ ist, und es bleibt hienach unentschieden, ob die Reihe konvergiert oder divergiert.

Frage 171. Welche Sätze ergeben sich aus den vorigen Untersuchungen?

Erkl. 116. Diese Sätze enthalten das älteste und wichtigste Kennzeichen für die Konvergenz bezw. Divergenz einer unendlichen Reihe; es findet sich schon bei dem Mathematiker Johann Bernouilli, geb. 1667 zu Basel, gest. 1748.

Erkl. 117. Diese Kennzeichen lassen sich kurz so ausdrücken:

$$\text{Limes}_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} < 1 & \text{Konvergenz} \\ = 1 & \text{unbestimmt} \\ > 1 & \text{Divergenz.} \end{cases}$$

Antwort. Satz 1: Wenn in einer Reihe mit nur positiven Gliedern der Wert des Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sich für $n = \infty$ einer Grenze g nähert, welche **kleiner** als 1 ist, so ist die Reihe **konvergent.**

Satz 2: Wenn dieser Grenzwert $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für $n = \infty$ **größer** ist als 1, so ist die Reihe **divergent.**

Satz 3: Wenn der Grenzwert $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für $n = \infty$ der **Einheit** gleich ist, so kann die Reihe **konvergieren** oder **divergieren** und es bedarf zur Entscheidung einer weiteren Untersuchung.

Aufgabe 317. Untersuche die Reihe

$$1+\frac{ax}{1}+\frac{a(a+1)x^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)x^3}{3!}+\cdots,$$

in welcher a und x positive endliche Zahlen bedeuten.

Auflösung. Hier ist

$$u_n=\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)\cdot x^n}{n!}$$

und

$$u_{n+1}=\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)(a+n)\cdot x^{n+1}}{n+1!}$$

daher

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(a+n)\cdot x}{n+1}=\frac{(n+1+a-1)x}{n+1}$$

$$=\left(1+\frac{a-1}{n+1}\right)\cdot x$$

Wenn wir n ins Unendliche wachsen lassen, so nähert sich $\frac{a-1}{n+1}$ der Grenze 0, die Klammer $1+\frac{a-1}{n+1}$ der Grenze 1 und die rechte Seite also der Grenze x; d. h. es nähert sich der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für $n=\infty$ der Grenze x. Daraus folgt nach Satz I und II der vorigen Frage, daß die Reihe konvergiert für x kleiner als 1 und divergiert für x größer als 1. Für $x=1$ versagt nach Satz III unsere Regel und es bleibt die Konvergenz zweifelhaft.

Aufgabe 318. Ebenso die Reihe

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots$$

Auflösung. Wir setzen

$$u_0=0,\ u_1=\frac{x}{1},\ u_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3},$$

$$u_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5},\ u_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7}$$

. . . .

Dann folgt

$$u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

also

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} = \frac{(2n-1)^2 \cdot x^2}{2n(2n+1)} = \frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2 \cdot x^2}{1+\frac{1}{2n}}.$$

Lassen wir jetzt n ins Unendliche wachsen, so wird $\frac{1}{2n}$ zu null und wir erhalten als Grenzwert g des Bruches $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für $n = \infty$ offenbar x^2. Daraus schließen wir, daß die untersuchte Reihe konvergiert für $x^2 < 1$, und daß sie divergiert für $x^2 > 1$. Für $x = 1$ wird $g = 1$; somit bleibt dieser Fall unentschieden.

Frage 172. Wie lassen sich die beiden Sätze, welche in Frage 165 aus dem Prinzip der Reihenvergleichung gewonnen worden sind, umformen?

Antwort. Wir nehmen wieder an, daß die unendliche Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots$$

mit lauter positiven Gliedern absolut sicher konvergiere. Von der zu untersuchenden unendlichen Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ mit lauter positiven Gliedern setzen wir voraus, daß an jeder Stelle, deren Index größer als eine endliche ganze Zahl k ist, die Bedingung erfüllt sei:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \frac{t_{k+1}}{t_k}$$

Dann ist:

$$\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < \frac{t_{k+2}}{t_{k+1}}$$

$$\frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} < \frac{t_{k+3}}{t_{k+2}}$$

$$\frac{u_{k+4}}{u_{k+3}} < \frac{t_{k+4}}{t_{k+3}}$$

$$\cdots\cdots$$

Durch Multiplikation von 2, 3, 4.. dieser Ungleichungen ergibt sich:

$$\frac{u_{k+3}}{u_{k+1}} < \frac{t_{k+3}}{t_{k+1}}$$

$$\frac{u_{k+4}}{u_{k+1}} < \frac{t_{k+4}}{t_{k+1}}$$

$$\cdots\cdots,$$

Hienach folgt durch Addition:

$$\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} + \frac{u_{k+3}}{u_{k+1}} + \frac{u_{k+4}}{u_{k+1}} + \cdots < \frac{t_{k+2}}{t_{k+1}} + \frac{t_{k+3}}{t_{k+1}} + \frac{t_{k+4}}{t_{k+1}} + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{u_{k+1}}\left\{u_{k+2} + u_{k+3} + u_{k+4} + \cdots\right\} < \frac{1}{t_{k+1}}\left\{t_{k+2} + t_{k+3} + t_{k+4} + \cdots\right\}$$

und

$$u_{k+2} + u_{k+3} + u_{k+4} + \cdots < \frac{u_{k+1}}{t_{k+1}}\left\{t_{k+2} + t_{k+3} + t_{k+4} + \cdots\right\}$$

Da nach unserer Voraussetzung die Reihe $t_0 + t_1 + t_2 + \cdots$ konvergiert, so ist die Summe

$$t_{k+2} + t_{k+3} + t_{k+4} + \cdots$$

eine endliche Größe; es steht hienach auf der rechten Seite unserer Ungleichung eine endliche Größe; somit muß auch die linke Seite

$$u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots$$

endlich sein; das gleiche gilt jetzt auch von der Reihe

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdot$$

d. h. diese Reihe konvergiert ebenfalls; wir haben hienach den

Satz I: Wenn in der zu untersuchenden Reihe von einer angebbaren Stelle an der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ **kleiner** bleibt als der entsprechende Quotient $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ in einer bekannten **konvergenten** Reihe, so ist die zu untersuchende Reihe **konvergent**.

Durch eine ganz ähnliche Beweisführung kommt man auch auf den analogen **II. Satz.**

Wenn in der zu untersuchenden Reihe von einer angebbaren Stelle an der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ **größer** bleibt als der entsprechende Quotient $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ in einer bekannten **divergenten** Reihe, so ist die zu untersuchende Reihe **divergent**.

Aufgabe 319. Welche Bedingungen der Konvergenz bezw. Divergenz ergeben sich für die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ bei der Vergleichung mit der Reihe

$$\frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots,$$

aus dem vorigen Doppelsatz?

Auflösung. Aus der Lösung der Aufgabe 312 wissen wir, daß die Reihe $\frac{1}{2^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots$ konvergiert für jeden Wert von $z > 1$ und daß sie divergiert für $z = 1$ und $z < 1$.

Nehmen wir jetzt

$$t_0 = 0,\ t_1 = \frac{1}{1^z},\ t_2 = \frac{1}{2^z},\ t_3 = \frac{1}{3^z} \cdots,$$

$$t_n = \frac{1}{n^z},\ t_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^z}, \cdots$$

so ergibt sich aus dem vorigen Doppelsatz, daß die zu untersuchende Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ konvergiert, wenn von einer bestimmten Stelle an

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^z}}{\frac{1}{n^z}} \text{ oder}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^z$$

und dabei $z > 1$ ist. Ebenso ergibt sich, daß die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

divergiert, wenn von einer bestimmten Stelle an

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^z$$

und dabei $z = 1$ oder $z < 1$ ist.

Frage 173. Wie lassen sich die soeben gewonnenen Bedingungen in bequemere Formen bringen?

Erkl. 118. Nehmen wir

$$y = x\left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^a - 1\right\}$$

und setzen voraus, daß a eine konstante Zahl bedeutet, während x eine beliebige veränderliche Zahl vorstellt, so gibt:

$$x = 1 \ldots y_1 = 2^a - 1$$

$$x = 2 \ldots y_2 = 2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^a - 1\right\}$$

$$x = 3 \ldots y_3 = 3\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^a - 1\right\}$$

$$x = 4 \ldots y_4 = 4\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^a - 1\right\}$$

. . . .

$$x = \infty \ldots y_x = \infty\left\{1^a - 1\right\} = \infty \cdot 0.$$

Der Grenzwert tritt hienach unter der unbestimmten Form $\infty \cdot 0$ auf; zu seiner Bestimmung wenden wir am einfachsten die Regeln der Differenzialrechnung an (Siehe Haas-Kleyer, Differenzialrechnung II. Teil pag. 115).

Antwort. Wir bilden den Ausdruck $n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\}$; geben wir jetzt der Zahl n die Werte 1, 2, 3, 4..., so können die zugehörigen Werte

$$\frac{u_1}{u_2} - 1,\ 2\left\{\frac{u_2}{u_3} - 1\right\},\ 3\left\{\frac{u_3}{u_4} - 1\right\},$$

$$4\left\{\frac{u_4}{u_5} - 1\right\}, \cdots$$

usw. sich einem bestimmten Grenzwert g nähern, wenn wir n ins Unendliche wachsen lassen; wir nehmen an, daß

$$\text{Limes } n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} = g$$

sei für $n = \infty$ und unterscheiden die zwei Fälle, daß erstens $g > 1$ und zweitens $g < 1$ sei.

Im ersten Fall $g > 1$ können wir zwischen 1 und g eine beliebige Zahl a wählen, so daß

$$g > a \text{ und } a > 1 \text{ ist.}$$

Wir setzen:

$$y = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^a - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^a - 1$$

$$\psi(x) = \frac{1}{x} \text{ und erhalten}$$

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}; \text{ somit folgt}$$

$$\text{Limes } y_\infty = \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

$$= \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{a-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \underset{x=\infty}{\text{Limes}}\ a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{a-1}.$$

Daraus folgt, daß

$$\text{Limes } x\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^a - 1\right\} = a \text{ ist für } x = \infty.$$

Schreiben wir n statt x, so haben wir die Formel:

$$\text{Limes } n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1\right\} = a \text{ für } n = \infty.$$

Diese Zahl a läßt sich auch als ein Grenzwert auffassen, denn der Ausdruck

$$n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1\right\}$$

erhält für $n = \infty$ den Wert a oder es ist

$$\text{Limes } n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1\right\} = a$$

$$\text{für } n = \infty$$

(Siehe Erkl. 118).

Die Ungleichung $g > a$ geht hiemit über in

$$\underset{n=\infty}{\text{Limes}}\ n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\}$$

$$> \underset{n=\infty}{\text{Limes}}\ n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1\right\}$$

Demnach muß auch schon für ein endliches n von einer angebbaren Stelle an

$$n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} > n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1\right\}$$

sein; dann ist aber auch

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \text{ oder}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^a,$$

während gleichzeitig $a > 1$ ist. Somit ist die obige Konvergenzbedingung (Frage 172)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^z,$$

welche auch

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^z$$

geschrieben werden kann, erfüllt, wenn der Grenzwert $g > 1$ ist.

Im zweiten Fall $g < 1$ wählen wir zwischen g und 1 eine beliebige Zahl b, so daß

$$g < b \text{ und } b < 1 \text{ ist.}$$

Wir stellen uns vor, es sei b der Grenzwert des Ausdruckes

$$n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^b - 1\right\}$$

für $n = \infty$. Dadurch bekommen wir für $g < b$ jetzt:

$$\underset{\text{für } n=\infty}{\text{Limes}}\; n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} < \underset{\text{für } n=\infty:}{\text{Limes}}\; n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^b - 1\right\}$$

Es muß also auch schon einen endlichen Wert von n geben, für welchen

$$n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} < n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^b - 1\right\}$$

ausfällt; dann ist aber

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^b \text{ oder}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^b,$$

wobei $b < 1$ angenommen ist. Die Divergenzbedingung der Frage 172

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^z \text{ für } z < 1$$

wird demnach erfüllt, wenn der Grenzwert g kleiner als die Einheit ist.

Frage 174. Welches sind jetzt die für die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

mit lauter positiven Gliedern gewonnenen neuen Bedingungen der Konvergenz oder Divergenz?

Antwort. Aus den vorigen Betrachtungen folgt

Satz I: Wenn in der zu untersuchenden Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

der Grenzwert des Ausdrucks

$$n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} > 1 \text{ ist für } n = \infty,$$

so ist die Reihe **konvergent**, und

Erkl. 119. Wenn der Grenzwert g den Wert 1 erreicht, oder wenn

$$\text{Limes}\ n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\}=1$$

ist, so müssen zur Entscheidung, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt, noch weitere Untersuchungen angestellt werden, welche wir hier weglassen.

Erkl. 120. Die obigen Konvergenz- und Divergenzbedingungen hat zuerst Raabe aufgestellt 1832 in der Zeitschrift für Physik und Mathematik 10. Bd. Seite 63.

Satz II: Wenn in der zu untersuchenden Reihe

$$u_0+u_1+u_2+\cdots$$

der Grenzwert von dem Ausdruck

$$n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\}<1$$

ist für $n=\infty$, so ist die Reihe **divergent.**

Mit diesen Sätzen lassen sich in den meisten Fällen die Untersuchungen über Konvergenz bezw. Divergenz da zum Abschluß bringen, wo das Kennzeichen $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ allein zur Entscheidung versagt hat; wir zeigen dies an folgenden Beispielen:

Aufgabe 320. Zu entscheiden, ob die Reihe

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\cdots$$

der Aufgabe 318 für $x=1$ konvergiert.

Auflösung. Wir erhielten dort:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2x^2}{1+\frac{1}{2n}}$$

Für $x=1$ folgt daraus

$$n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\}=n\left\{\frac{1+\frac{1}{2n}}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2}-1\right\}$$

$$=\frac{n\left(\frac{3}{2n}-\frac{1}{4n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2}=\frac{{}^3/_2-\frac{1}{4n}}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2};$$

hienach ist

$$\text{Limes}\ n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\}=\frac{3}{2}$$

für $n=\infty$; der Grenzwert g ist also größer als 1, und die Reihe konvergiert auch für $x=1$.

Aufgabe 321. Es soll die hypergeometrische Reihe

$$1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c\cdot(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c\cdot(c+1)(c+2)}x^3+\cdots,$$

worin a, b, c positive Zahlen bedeuten, untersucht werden.

Auflösung. Hier nehmen wir:

$$u_0=1,\ u_1=\frac{ab}{1\cdot c},\ u_2=\frac{a(b+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c\cdot(c+1)}x^2\ldots.$$

$$u_n=\frac{a(a+1)(a+b)\ldots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot c\cdot(c+1)(c+2)\ldots(c+n-1)}x^n$$

$$u_{n+1}=\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)b(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)\cdot c(c+1)(c+2)\ldots(c+n)}\cdot x^{n+1}$$

Daraus folgt:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}\cdot x=\frac{\left(\frac{a}{n}+1\right)\left(\frac{b}{n}+1\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{c}{n}+1\right)}\cdot x$$

Hienach ist

$$\text{Limes}\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=x\ \text{für}\ n=\infty.$$

Nach den Sätzen der Frage 171 konvergiert daher die obige Reihe, wenn $x<1$ ist, dagegen divergiert sie für $x>1$.

Zur Erledigung des Falles $x=1$ bilden wir

$$n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\}=n\left\{\frac{(n+1)(c+n)}{(a+n)(b+n)}-1\right\}=\frac{\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{c}{n}+1\right)-\left(\frac{a}{n}+1\right)\left(\frac{b}{n}+1\right)\right\}n}{\left(\frac{a}{n}+1\right)\left(\frac{b}{n}+1\right)}$$

$$=\frac{c+1-a-b+\frac{c-ab}{n}}{\left(\frac{a}{n}+1\right)\left(\frac{b}{n}+1\right)}$$

Daraus folgt:

$$\underset{n=\infty}{\text{Limes}}\, n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\}=\underset{n=\infty}{\text{Limes}}\frac{c+1-a-b+\frac{c-ab}{n}}{\left(\frac{a}{n}+1\right)\left(\frac{b}{n}+1\right)}=c+1-(a+b).$$

Nach dem Satz I der Frage 174 konvergiert unsere Reihe auch für $x=1$, wenn $c>a+b$ ist.

Aufgabe 322. Es soll untersucht werden, für welche Werte von x die unendliche Reihe

$$\frac{\lambda}{1}+\frac{\lambda(2^2-\lambda^2)}{1\cdot2\cdot3}\sin^2 x$$
$$+\frac{\lambda(2^2-\lambda^2)(4^2-\lambda^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\sin^4 x+\cdots$$

konvergiert.

Auflösung. Wir setzen:

$$u_0=\frac{\lambda}{1}$$

$$u_1=\frac{\lambda(2^2-\lambda^2)}{1\cdot2\cdot3}\sin^2 x$$

$$u_2=\frac{\lambda(2^2-\lambda^2)(4^2-\lambda^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\sin^4 x$$

$$u_3=\frac{\lambda(2^2-\lambda^2)(4^2-\lambda^2)(6^2-\lambda^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\sin^6 x$$

. . . .

$$u_n=\frac{\lambda(2^2-\lambda^2)\ldots([2n]^2-\lambda^2)}{(2n+1)!}\sin^{2n} x$$

$$u_{n+1}=\frac{\lambda(2^2-\lambda^2)..([2n+2]^2-\lambda^2)}{(2n+3)!}\sin^{2n+2} x$$

und erhalten:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+2)^2-\lambda^2}{(2n+2)(2n+3)}\sin^2 x$$

$$=\frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)^2-\frac{\lambda^2}{n^2}}{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}\sin^2 x$$

daraus folgt

$$\underset{n=\infty}{\text{Limes}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\sin^2 x.$$

Heft 1533-

Preis des Heftes 25 Pfg.

Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

—— Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. **A. Haas.** ——

Heft 15

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist

Nach unserem ersten Hauptsatz (Frage 171) konvergiert unsere Reihe, wenn $\sin^2 x$ kleiner als 1 ist; dies trifft zu für alle Winkel x, welche zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und 0 und $-\frac{\pi}{2}$ liegen, also konvergiert die Reihe für $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$. Zur Entscheidung des Falles $\sin^2 x = 1$ bilden wir

$$n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\}=n\left\{\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+2)^2-\lambda^2}-1\right\}=\frac{n(2n+2+\lambda^2)}{(2n+2)^2-\lambda^2}=\frac{2+\frac{2+\lambda^2}{n^2}}{\left(2+\frac{2}{n}\right)^2-\frac{\lambda^2}{n^2}}$$

Daraus folgt:

$$\operatorname*{Limes}_{n=\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

Nach dem II. Satz der Frage 174 ist unsere Reihe für $\sin^2 x = 1$ oder für $x = \pm\frac{1}{2}\pi$ divergent.

---

4. Über die Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Frage 175. Welche Anhaltungspunkte für die Entscheidung der Konvergenz bezw. Divergenz bietet eine Reihe, deren Glieder verschiedene Vorzeichen haben?

Antwort. Wir betrachten die unendliche Reihe I:

$$u_0 - u_1 - u_2 + u_3 - u_4 - u_5 + u_6 - \cdots,$$

in welcher auf ein positives Glied stets zwei negative folgen.

Aus ihr leiten wir eine II. Reihe ab, indem wir in der gegebenen alle negativen Vorzeichen in positive umwandeln, d. h. wir bilden

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

und untersuchen diese Reihe II auf ihre Konvergenz bezw. Divergenz.

Erkl. 121. Wenn die Reihe II konvergiert, so heißt die Reihe I absolut konvergent; ihr Grenzwert ist von der Anordnung der Glieder innerhalb der Reihe unabhängig; wie man auch die Glieder umstellen mag, folgt stets die nämliche Summe; man bezeichnet diese Eigenschaft als unbedingte Konvergenz der Reihe mit positiven und negativen Vorzeichen.

Siehe **Cauchy**, Analyse algébrique 1821. **Lejeune-Dirichlet**, Berliner Abhandlungen 1837. **Scheibler**, Über unendliche Reihen, Leipzig 1860.

Wenn hier nach unseren früheren Regeln die Konvergenz nachgewiesen ist, so hat der Grenzwert

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

einen bestimmten endlichen Wert. Das Gleiche muß dann auch der Fall sein für den Grenzwert der Summe der positiven Glieder, d. h. für

$$s_1 = u_0 + u_3 + u_6 + u_9 + \cdots$$

und für den Grenzwert der Summe aller negativen Glieder, d. h. für

$$s_2 = u_1 + u_2 + u_4 + u_5 + \cdots,$$

denn es ist ja $S = s_1 + s_2$.

Daraus ergibt sich aber, daß auch die Differenz $s_1 - s_2$ eine bestimmte endliche Größe s sein muß; letztere bedeutet aber nichts anderes als den Grenzwert der Summe

$$u_0 - u_1 - u_2 + \cdots$$

der gegebenen Reihe I. Wir sehen daraus, daß die Konvergenz der Reihe II jene der Reihe I zur Folge hat. Ganz ähnliche Schlüsse lassen sich in allen anderen Fällen ziehen; wir haben hienach den **Satz:**

Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern ist konvergent, wenn die andere Reihe konvergiert, welche dieselben Glieder aber mit lauter positiven Vorzeichen enthält.

Aufgabe 323. Es soll die unendliche Reihe I

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \cdots$$

auf ihre Konvergenz untersucht werden.

Auflösung. Wir bilden die Reihe II

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$$

mit $u_n = \frac{n}{3^n}$ und $u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$;

dann ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)3^n}{n \cdot 3^{n+1}} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{3};$$

daraus folgt

$$\text{Limes} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} \text{ für } n = \infty$$

d. h. die Reihe II konvergiert, somit auch die zu untersuchende Reihe I.

Frage 176. Gibt es auch unendliche Reihen mit positiven und negativen Gliedern

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots$$

welche konvergieren, während die aus ihnen gebildeten Reihen mit den nämlichen Gliedern und nur positiven Vorzeichen divergieren?

Antwort. Im Jahr 1669 fand der englische Mathematiker James Gregory und nach ihm Leibniz, daß

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

ist; dabei bedeutet π die bekannte Irrationalzahl 3,1415...

Bilden wir aus dieser Reihe I die Reihe II mit nur positiven Gliedern:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} + \cdots,$$

so ist in ihr

$$u_n = \frac{1}{2n-1},\ u_{n+1} = \frac{1}{2n+1};$$

daher

$$\text{Limes} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{Limes} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 1$$

für $n = \infty$; nach Satz III der Frage 171 kann die Reihe konvergieren oder divergieren. Daher bestimmen wir jetzt:

$$\text{Limes } n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} = \text{Limes } n\left\{\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right\} = \text{Limes} \frac{2n}{2n-1}$$

$$= \text{Limes} \frac{2}{2-\frac{1}{n}} = 1 \text{ für } n = \infty; \text{ somit bringen}$$

auch die zwei Sätze der Frage 174 keine Entscheidung. Wir sehen aber, daß

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots, \text{ also auch}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right).$$

Erkl. 122. Reihen I mit positiven und negativen Gliedern, welche konvergieren, während die aus ihnen gebildeten Reihen II mit nur positiven Gliedern divergieren, heißen nicht absolut konvergent. Jede derartige Reihe konvergiert nur bedingt, d. h. ihre Summe ist von Anordnung der Glieder abhängig.

(Satz von Riemann 1867, Göttinger Abhandlungen).

Da nach Frage 158 die harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ divergiert, so muß auch die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ divergieren, während $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ konvergiert.

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß es tatsächlich Reihen I gibt, welche konvergieren, während die aus ihnen gebildeten Reihen II mit den nämlichen Gliedern und nur positiven Vorzeichen Divergenz zeigen.

Frage 177. Kennt man allgemeine Sätze, durch welche sich die Konvergenz von Reihen mit positiven und negativen Gliedern, deren Reihen II mit nur positiven Gliedern divergiereu, entscheiden läßt?

Antwort. Solche allgemeine Sätze sind keine bekannt; dagegen läßt sich die Konvergenz erkennen bei Reihen, in welchen auf ein positives Glied stets ein negatives folgt, auf dieses wieder ein positives usw. Derartige Reihen heißen Reihen mit abwechselnden Vorzeichen; z. B.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \text{ oder}$$

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots$$

Frage 178. Welches ist die Bedingung für die Konvergenz von unendlichen Reihen mit abwechselnden Vorzeichen?

Antwort. Betrachten wir die aus der harmonischen Reihe gebildete Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

so zeigt dieselbe außer dem regelmäßigen Zeichenwechsel noch die Eigenschaften, daß die absoluten Werte der Glieder fortwährend abnehmen bis zum Wert Null im Unendlichen. Wir schreiben:

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1 - 1/2 \\
s_4 &= (1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) \\
s_6 &= (1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) + (1/5 - 1/6) \\
s_8 &= (1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) + (1/5 - 1/6) + (1/7 - 1/8) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Da die eingeklammerten Differenzen alle positiv sind, so folgt, daß

$$s_2 < s_4 < s_6 < s_8 \ldots$$

Die Größen s_2, s_4, s_6, $s_8 \ldots$ nehmen also mit wachsender Gliederzahl an Größe immer zu. Wir können aber auch folgende Zusammenfassungen machen:

$$s_1 = 1$$
$$s_3 = 1 - {}^1/_2$$
$$s_5 = 1 - ({}^1/_2 - {}^1/_3)$$
$$s_7 = 1 - ({}^1/_2 - {}^1/_3) - ({}^1/_4 - {}^1/_5)$$
$$s_9 = 1 - ({}^1/_2 - {}^1/_3) - ({}^1/_4 - {}^1/_5) - ({}^1/_6 - {}^1/_7) - \cdots$$

Da auch hier die einzelnen Klammern positiv sind, ist

$$s_1 > s_3 > s_5 > s_7 > s_9 \ldots$$

Die Größen s_1, s_3, s_5, s_7, s_9 nehmen fortgesetzt ab.

Nun ist aber

$$s_9 - s_8 = \frac{1}{8}; \quad s_{101} - s_{100} = \frac{1}{100};$$

$$s_{10001} - s_{10000} = \frac{1}{10000};$$

$$s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{1}{2n} \text{ und}$$

Limes $s_{2n+1} - s_{2n} = 0$ für $n = \infty$.

Somit nähern sich s_1, $s_3 \ldots$ und s_2, s_4, $s_6 \ldots$ einer und derselben Grenze s, und zwar geschieht dies in der ersten Reihe durch fortwährende Zunahme, und in der anderen durch fortwährende Abnahme; daher muß dieser gemeinschaftliche Grenzwert s eine bestimmte endliche Größe sein.

Vermöge der Gleichung

$$s = \text{Limes } s_{2n+1} = \text{Limes } s_{2n}$$

ist nun

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

eine konvergente Reihe.

Durch ganz ähnliche Schlüsse kommt man bei jeder Reihe mit abwechselndem Vorzeichen

$$u_0 - u_1 + u_2 + \cdots$$

zu dem **Satz:**

Eine unendliche Reihe mit abwechselnden Vorzeichen konvergiert, wenn das Anfangsglied endlich ist und die Zahlenwerte der Glieder mit wachsendem Stellenzeiger abnehmen und sich der Null als Grenze fortwährend nähern.

Frage 179. Welches eigentümliche Verhalten zeigt die Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \frac{7}{6} + - \cdots ?$$

Antwort. Wir bilden zuerst die Summe der $2n$ ersten Glieder:

$$S_{2n} = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + - \cdots + \frac{2n}{2n-1} - \frac{2n+1}{2n};$$

nun ist

$$\frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1},$$
$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2},$$
$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{2n}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1},$$
$$\frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n};$$

daraus folgt:

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} = 1 - \frac{1}{2};\quad \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots, \frac{2n}{2n-1} - \frac{2n+1}{2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n};$$

somit ist:

$$S_{2n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

In gleicher Weise erhalten wir für die Summe der $2n+1$ ersten Glieder:

$$S_{2n+1} = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + - \cdots + \frac{2n}{2n-1} - \frac{2n+1}{2n} + \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + - \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$= S_{2n} + \frac{2n+2}{2n+1}$$

Nehmen wir jetzt unendlich viel Glieder, so wird für $n = \infty$:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

Nach Haas, Differenzialrechnung II. Teil Seite 99, ist aber

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = - \cdots = l(2)$$

Da ferner für $n = \infty$ der Bruch $\frac{2n+2}{2n+1}$ den Wert 1 erlangt, so erhalten wir

$$\lim_{n=\infty} S_{2n} = l(2) \text{ und } \lim_{n=\infty} S_{2n+1} = l(2) + 1$$

Die Summe der gegebenen Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + - \cdots$$

nähert sich hienach **zwei** endlichen Grenzen, welche um 1 von einander verschieden sind, je nachdem man eine **gerade** odar eine **ungerade** Anzahl von Gliedern addiert.

Ein gleiches Verhalten zeigt auch die Reihe

$$a - a + a - a + \cdots,$$

deren Summe bei gerader Gliederzahl $= 0$, bei ungerader Gliederzahl $= a$ ist.

Solche alternierende Reihen gehören hienach zu den **oszillierenden**. Siehe Frage 140.

5. Über die Verbindung unendlicher Reihen.

Frage 180. Dürfen unendliche Reihen den gewöhnlichen Rechnungsoperationen wie der Addition und der Multiplikation unterworfen werden?

Antwort. In der Algebra hat man es bei den gewöhnlichen Rechnungsarten mit Ausdrücken von endlicher Gliederzahl zu tun; deshalb bedarf es einer besonderen Untersuchung, ob es erlaubt ist, die Regeln der Algebra auch auf unendliche Reihen anzuwenden.

Hier erscheint sofort die Notwendigkeit, daß wir die divergenten Reihen ausschließen; weil wir nur bestimmte Größen rechnerisch mit einander verknüpfen können und die Summe einer divergenten Reihe entweder einen unendlich großen oder einen unbestimmten Wert besitzt; unsere Aufgabe konzentriert sich hienach auf die Untersuchung der Möglichkeit und der Bedingungen der rechnerischen Verknüpfung von konvergenten Reihen.

Frage 181. Es seien

$$u_1 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

zwei konvergente Reihen; wie werden dieselben addiert, und welches ist ihre Summe?

Erkl. 123. Sind S und S' zwei konvergente Reihen, und a und b zwei endliche Faktoren, so erkennt man, daß der angegebene Satz auch auf die Bildung von $S - S'$, $aS + bS'$ usw. anwendbar ist.

Erkl. 124. Sind $S, S', S'', S''' \ldots$ eine endliche Anzahl von konvergenten Reihen, während $a, b, c, d \ldots$ endliche Faktoren vorstellen, so gelangt man auch zur Bildung von

$$aS + bS' + cS'' + dS''' + \ldots$$

Antwort. Unter der Voraussetzung, daß n eine ganze endliche Zahl vorstelle, bilden wir in jeder der beiden Reihen die Summe der n ersten Glieder:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$S_n' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n;$$

ferner setzen wir:

$$w_0 = u_0 + v_0$$
$$w_1 = u_1 + v_1$$
$$w_2 = u_1 + v_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$w_n = u_n + v_n \text{ und}$$
$$S_n'' = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n.$$

Dann ist:

$$S_n'' = S_n + S_n'$$

Lassen wir nun die Zahl n ins Unendliche wachsen, so geht S_n in

die bestimmte Summe S der I. Reihe, und ebenso S_n' in die bestimmte Summe S' der II. Reihe über; dann wird $S_n + S_n'$ eine bestimmte endliche Zahl $S + S'$; dies ist aber offenbar die Grenze S'', welcher sich die Größe S_n'' der III. Reihe für $n = \infty$ nähert; es konvergiert demnach auch diese III. Reihe und ihre Summe ist die Summe der beiden gegebenen. Daraus folgern wir den Satz:

Wenn man in zwei konvergenten Reihen die Glieder mit gleichen Stellenzeigern addiert, so bilden diese Einzelsummen die Glieder einer konvergenten Reihe, deren Summe gleich der Summe der beiden gegebenen Reihen ist.

Frage 182. Es seien wieder

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

zwei konvergente Reihen mit lauter positiven Gliedern. Wie wird ihr Produkt gebildet und wie groß ist dasselbe ausgedrückt in den Summen S und S' der beiden unendlichen Reihen?

Antwort. Wir nehmen:

$$S_3 = u_0 + u_1 + u_2$$
$$S_3' = v_0 + v_1 + v_2$$
$$S_6 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$
$$S_6' = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5;$$

nun bilden wir:

$$w_0 = u_0\, v_0$$
$$w_1 = u_0\, v_1 + u_1\, v_0$$
$$w_2 = u_0\, v_2 + u_1\, v_1 + u_2\, v_0$$
$$w_3 = u_0\, v_3 + u_1\, v_2 + u_2\, v_1 + u_3\, v_0$$
$$w_3 = u_0\, v_4 + u_1\, v_3 + u_2\, v_2 + u_3\, v_1 + u_4\, v_0$$
$$w_5 = u_0\, v_5 + u_1\, v_4 + u_2\, v_3 + u_3\, v_2 + u_4\, v_1 + u_5\, v_0$$

und nehmen w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 als Glieder einer Reihe, deren Summe S_6'' heißen soll, d. h. es soll sein:

$$S_6'' = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

Wollen wir S_6'' mit $S_6 \cdot S_6'$ vergleichen, so müssen wir

$$(u_0 + u_1 + \cdots + u_5)(v_0 + v_1 + \cdots + v_5)$$

ausrechnen; dabei finden wir, daß dieses Produkt außer den in S_6'' enthaltene Glieder noch folgende hat:

$$\begin{aligned} & u_1 v_5 + u_2 v_4 + u_3 v_3 + u_4 v_2 + u_5 v_1 \\ & + u_2 v_5 + u_3 v_4 + u_4 v_3 + u_5 v_2 \\ & + u_3 v_5 + u_4 v_4 + u_5 v_3 \\ & + u_4 v_5 + u_5 v_4 \\ & + u_5 v_5. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$S_6 S_6' > S_6''.$$

Berechnen wir jetzt

$$S_3 \cdot S_3' = (u_0 + u_1 + u_2)(v_0 + v_1 + v_2),$$

so fehlen von den in S_6'' enthaltenen Glieder die folgenden:

$$\begin{aligned} & u_0 v_3 + u_3 v_0 \\ & + u_0 v_4 + u_1 v_3 + u_3 v_1 + u_4 v_0 \\ & + u_0 v_5 + u_1 v_4 + u_2 v_3 + u_3 v_2 + u_4 v_1 + u_5 v_0 \end{aligned}$$

Daraus schließen wir:

$$S_6'' > S_3 \cdot S_3'$$

und erhalten jetzt die Ungleichung:

$$S_6 \cdot S_6' > S_6'' > S_3 \cdot S_3'.$$

Nun nehmen wir:

$$\begin{aligned} S_7 &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_6 \\ S_7' &= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_6 \\ w_6 &= u_0 v_6 + u_1 v_5 + u_2 v_4 + u_3 v_3 + u_4 v_2 + u_5 v_1 + u_6 v_0 \\ S_7'' &= w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6. \end{aligned}$$

Jetzt können wir in gleicher Weise zeigen, daß

$$S_7 \cdot S_7' > S_7'' > S_3 \cdot S_3' \text{ ist.}$$

Gehen wir zur Bildung von S_4, S_4', S_8, S_8', w_8 und S_8'' beziehungsweise S_9, S_9', w_9 nnd S_9'' über, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} S_8 \cdot S_8' > S_8'' > S_4 \cdot S_4' \\ S_9 \cdot S_9' > S_9'' > S_4 \cdot S_4' \end{aligned}$$

und allgemein:

$$\begin{aligned} S_{2n} \cdot S_{2n}' > S_{2n}'' > S_n \cdot S_n' \\ S_{2n+1} \cdot S_{2n+1}' > S_{2n+1}'' > S_n \cdot S_n' \end{aligned}$$

Lassen wir n immer größer werden so nähern sich die Produkte $S_n \cdot S_n'$ und $S_{2n} \cdot S_{2n}'$ beziehungsweise $S_{2n+1} \cdot S_{2n+1}'$ derselben bestimmten endlichen Grenze $S \cdot S'$, weil ja S und S' zwei bestimmte Größen sind. Dabei erhält aber auch unsere dritte Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

unendlich viel Glieder; heißt ihre Summe S'', so geht mit $n = \infty$ die Größe S_{2n}'' und die Größe S_{2n+1}'' in S'' über, und es folgt:

$$S'' = S \, . \, S';$$

hiemit ist der **Satz** bewiesen.

Sind $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ und $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ zwei konvergente unendliche Reihen mit lauter positiven Gliedern, so konvergiert auch die **dritte** unendliche Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

mit den Gliedern

$$\begin{aligned} w_0 &= u_0 v_0 \\ w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0 \\ w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n &= u_0 v_n + u_1 v_{n+1} + u_2 v_{n+2} + \cdots + u_n v_0 \end{aligned}$$

und ihre Summe S'' ist gleich dem Produkt $S \cdot S'$ der beiden gegebenen Reihen.

Frage 183. Wie gestalten sich bezüglich der Multiplikation die Verhältnisse, wenn die Glieder der beiden Reihen teils positiv, teils negativ sind?

Antwort. Wenn in den beiden Reihen S und S' positive und und negative Glieder enthalten sind und beide Reihen konvergieren, so darf gesetzt werden

$$S = s_1 - s_2$$

wo s_1 die Summe der positiven Glieder, und s_2 die Summe der negativen Glieder der I. Reihe bedeutet. In gleicher Weise nehmen wir in der II. Reihe

$$S' = s_1' - s_2'.$$

Da nun die vier Reihen s_1, s_1', s_2 und s_2' konvergente Reihen mit Gliedern von gleichen Vorzeichen sind, so darf auf sie die obige Multiplikationsregel angewendet werden. Aus den Produkten

$$s_1 s_1', \; s_1 s_2'', \; s_2 s_1' \text{ und } s_2 s_2'$$

erhält man

$$S'' = s_1 s_1' - s_1 s_2' - s_2 s_1' + s_2 s_2'$$
$$= (s_1 - s_2)(s_1' - s_2') = S \cdot S'$$

Hiemit haben wir den **Satz:**

Bei unendlichen Reihen mit positiven und negativen Gliedern gilt die obige Multiplikationsregel, wenn diese Reihen **absolut** konvergent sind; trifft dies nicht zu, so bedarf es weiterer Untersuchungen.

Aufgabe 324. Bilde das Produkt

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots\right)$$

Auflösung. Auf Seite 211 ist nachgewiesen worden, daß diese unendliche Reihen konvergieren; somit darf die obige Multiplikationsregel zur Anwendung gebracht werden. Wir setzen:

$$w_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$w_1 = \frac{x}{1!} + \frac{y}{1!} = \frac{x+y}{1!}$$

$$w_2 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} = \frac{(x+y)^2}{2!}$$

$$w_3 = \frac{x^2}{3!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y}{1!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} = \frac{(x+y)^3}{3!}$$

. . . .

Hienach ist das verlangte Produkt

$$= 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots.$$

Aufgabe 325. Wenn

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

eine konvergente Reihe vorstellt mit der Summe S; wie lautet dann die Reihe, welche durch die Quadrierung der gegebenen entsteht?

Auflösung. Es wird wegen $u_0 = v_0$; $u_1 = v_1$; $u_2 = v_2$ usw.

$$w_0 = u_0^2$$
$$w_1 = 2 u_0 u_1$$
$$w_2 = 2 u_0 u_2 + u_1^2$$
$$w_3 = 2 u_0 u_3 + 2 u_1 u_2$$
$$w_4 = 2 u_0 u_4 + 2 u_1 u_3 + u_2^2 \text{ usw.}$$

Hienach ist:

$$(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)^2 = u_0^2 + (2 u_0 u_1) + (2 u_0 u_2 + u_1^2) + (2 u_0 u_3 + 2 u_1 u_2)$$
$$+ (2 u_0 u_4 + 2 u_1 u_3 + u_1^{2}) + \cdots$$

Aufgabe 326. Wie groß ist

$$(1 + a_1 x + a_2 x_2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots)^2$$

unter der Voraussetzung der Konvergenz?

Auflösung. Für

$$u_0 = 1;\; u_1 = a_1 x;\; u_2 = a_2 x^2 \text{ u. s. f.}$$

folgt aus der vorigen Aufgabe, daß

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots)^2 = 1 + 2 a_1 x + (2 a_2 + a_1^2) x^2$$
$$+ (2 a_3 + 2 a_1 a_2) x^3 + (2 a_4 + 2 a_1 a_3 + a_2^2) x^4 + \cdots$$

sein muß.

---

6. Über Potenzreihen.

Frage 184. Welche Reihen werden als **P o t e n z r e i h e n** bezeichnet?

Antwort. Es sei a_0, $a_1 x$, $a_2 x^2$, $a_3 x^3 \ldots a^n x^n, \ldots$ eine nach steigenden ganzen Potenzen der veränderlichen Größe x geordnete Reihe, wo $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots$ positive oder negative Koeffizienten bezeichnen mögen. Dann stellt

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

eine Potenzreihe vor, wie z. B.:

$$0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + n x^n + \cdots$$ Siehe Seite 194

$$0 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$ Siehe Seite 210

$$0 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$ Siehe Seite 211.

Frage 185. Welches ist die Bedingung für die Konvergenz einer Potenzreihe?

Antwort. Hier haben wir den Satz: Eine Potenzreihe konvergiert unbedingt, wenn von einer bestimmten Stelle ab, der absolute Wert des Bruches $\frac{a_{n+1} \cdot x}{a_n}$ kleiner als 1 ist, d. h. für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner als der absolute Wert des Bruches $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ ist.

Denn nach Frage 175 konvergiert unbedingt die vorgelegte Potenzreihe mit positiven und negativen Gliedern, wenn die andere Reihe konvergiert, welche dieselben Glieder aber mit lauter positiven Vorzeichen hat. Nehmen wir die absoluten Werte der Glieder $u_n = a_n x^n$ und $u_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$, so gibt Satz I Seite 209, daß die Reihe $u_0, u_1 \ldots u_n, u_{n+1} \ldots$ mit lauter positiven Gliedern konvergiert, wenn von einer angebbaren Stelle ab

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{a_{n+1} \cdot x}{a_n} = \frac{x}{\frac{a_n}{a_{n+1}}}$$

kleiner ist als die Einheit, auch noch für $n = \infty$.

Frage 186. Wie gestaltet sich die Konvergenzbedingung der Potenzreihe in dem Fall, wo der absolute Wert des Bruches $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ sich bei unendlich wachsendem n einer bestimmten Grenze λ nähert?

Antwort. In diesem Fall wird sich auch der absolute Wert des Bruches $\frac{x}{\frac{a_n}{a_{n+1}}}$ für $n = \infty$ einer bestimmten Grenze $g = \frac{x}{\lambda}$ nähern; nach Satz I Seite 214 tritt Konvergenz ein für $g < 1$ und Divergenz für $g > 1$. Hienach wird unsere Potenzreihe konvergieren für solche absolute Werte von x, welche $\frac{x}{\lambda}$ kleiner als 1 machen. Daraus folgt der

Satz: Wenn in einer Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

der absolute Wert des Bruches $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ sich bei unendlich wachsendem n der Grenze λ nähert, so konvergiert die Reihe unbedingt für solche Werte von x, welche zwischen $+\lambda$ und $-\lambda$ liegen; d. h. wenn x zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegt.

Ist die Bendingung erfüllt, so liegt unbedingte Konvergenz der Potenzreihe vor; ob sie auch noch für $x = +\lambda$ oder für $x = -\lambda$ konvergiert, muß nach den übrigen Konvergenzregeln entschieden werden.

Aufgabe 327. Für welche Werte von x konvergiert die Reihe:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots ?$$

Auflösung. Hier ist

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 4 \ldots$$

$$a_n = n + 1, \; a_{n+1} = n + 2 \ldots$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2};$$

$$\operatorname*{Limes}_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1; \text{ also } \lambda = 1.$$

Unsere Reihe konvergiert hienach für alle x zwischen -1 und $+1$.

Für $x = +1$ geht sie über in die divergente Reihe

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

Für $x = -1$ gibt sie

$$1 - 2 + 3 - 4 - 5 + \cdots$$

d. h. sie oszilliert zwischen $+\infty$ $-\infty$ je nach dem man n gerade oder ungerade annimmt.

Aufgabe 328. Ebenso soll das Konvergenzgebiet von x in der Reihe

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$$

festgestellt werden.

Auflösung. Wir haben hier

$$a_0 = 1,\ a_1 = 3 = \binom{3}{2};\ a_2 = 6 = \binom{4}{2};$$

$$a_3 = 10 = \binom{5}{2} \cdots$$

$$a_n = \binom{n+2}{2};\ a_{n+1} = \binom{n+3}{2} \cdots.$$

Dies liefert:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\binom{n+2}{2}}{\binom{n+3}{2}} = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+3)(n+2)} = \frac{n+1}{n+3} = 1 - \frac{2}{n+3}$$

Daher

$$\lambda = \operatorname*{Limes}_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \operatorname*{Limes}_{n=\infty} \left(1 - \frac{2}{n+3}\right) = 1$$

Die Reihe konvergiert demnach für alle Werte von x zwischen -1 und $+1$.

Für $x = +1$ erhalten wir

$$1 + 3 + 6 + \cdots$$

mit unendlich großer Summe; für $x = -1$ bekommen wir die Reihe

$$1 - 3 + 6 - 10 + 15 \mp \cdots,$$

welche ebenfalls divergiert.

Das Konvergenzgebiet für x liegt also zwischen $+1$ und -1 mit Ausschluß der beiden Grenzen.

Aufgabe 329. Für welche Werte von x konvergiert die Binomialreihe:

$$1 + \frac{m}{1} \cdot x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots ?$$

Auflösung. Ist m eine ganze positive Zahl, so bricht die Reihe mit dem Glied x^m ab; für jede andere Zahl m geht die Reihe ins Unendliche fort und es fragt sich, unter welcher Bedingung die Reihe konvergiert oder divergiert.

Wir bilden:

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

$$a_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot (n+1)}$$

Heft 153

Preis des Heftes 25 Pfg.

Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung
der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

— Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas. —

Heft 16

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist

Daraus folgt:

$$\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n x^n}=\frac{m-n}{n+1}\cdot x=\left(\frac{m+1}{n+1}-1\right)x$$

und daher

$$g=\operatorname*{Limes}_{n=\infty}\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n x^n}=\operatorname*{Limes}_{n=\infty}\left\{\frac{m+1}{n+1}-1\right\}x$$
$$=-x.$$

Ist also m eine **beliebige** Zahl, außer ganz und positiv —, so konvergiert nach unseren früheren Sätzen die obige Reihe, wenn der absolute Wert von $-x$ weniger als 1 beträgt; mit anderen Worten die Reihe konvergiert für alle Werte von x zwischen -1 und $+1$ und divergiert für alle Werte von x, für welche $x^2>1$ ist.

Wenn $x=+1$ ist, so lehrt eine weitere Untersuchung, daß die obige Reihe konvergiert für $\infty>m>-1$.

Wenn $x=-1$ ist, konvergiert die Reihe für $\infty>m>0$.

Erkl. 125. Für $m=0, 1, 2, 3, 4\ldots$ erhalten wir die Reihen:

$$\begin{array}{l}1\\1+x\\1+2x+x^2\\1+3x+3x^2+x^3\\1+4x+6x^2+4x^3+x^4\\\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Wir sehen, daß diese Reihen die Entwicklungen von $(1+x)^0$, $(1+x)^1$, $(1+x)^2$, $(1+x)^3$, $(1+x)^4\ldots$ nach dem binomischen Lehrsatz darstellen.

Wählen wir $m=-1$, so geht die obige Reihe über in

$$1+\frac{(-1)}{1}x+\frac{(-1)(-2)}{1.2}x^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1.2.3}x^3+\ldots;$$

man sieht, daß diese Reihe sich ins Unendliche fortzetzt.

Nehmen wir $m=+\,^1/_2$, so giebt sie

$$1+\frac{^1/_2}{1}x+\frac{^1/_2(^1/_2-1)}{1.2}x^2+\frac{^1/_2(^1/_2-1)(^1/_1-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

auch hier ergeben sich unendlich viel Glieder usw.

Aufgabe 330. Für welche Werte von m konvergiert die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots?$$

Auflösung. Diese Reihe geht aus der Binominalreihe hervor, wenn $x=1$ gesetzt wird; somit konvergiert dieselbe für alle Werte von m zwischen -1 und ∞.

Für $m=\frac{3}{2}$ z. B. erhalten wir:

$$1+\frac{3}{2}+\frac{^3/_2\cdot{}^1/_2}{1\cdot 2}+\frac{^3/_2\cdot{}^1/_2(-\,^1/_2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{^3/_2\cdot{}^1/_2\cdot(-\,^1/_2)(-\,^3/_2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$
$$+\frac{^3/_2\cdot{}^1/_2\cdot(-\,^1/_2)(-\,^3/_2)(-\,^5/_2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$$

oder

$$1+\frac{3}{2}+\frac{3}{8}-\frac{3}{48}+\frac{3}{128}-\frac{3}{256}+\frac{7}{1024}-\cdots$$

Für $m=-\frac{1}{2}$ folgt:

$$1+\frac{-\,^1/_2}{1}+\frac{(-\,^1/_2)(-\,^3/_2)}{1\cdot 2}+\frac{(-\,^1/_2)(-\,^3/_2)(-\,^5/_2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+\frac{(-\,^1/_2)(-\,^3/_2)(-\,^5/_2)(-\,^7/_2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

oder

$$1-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{5}{16}+\frac{35}{128}-\cdots$$

Man sieht, daß von einer bestimmten Stelle an die Vorzeichen der Glieder abwechseln.

Aufgabe 331. Für welche Werte von m konvergiert die Reihe:

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots ?$$

Auflösung. Diese Reihe entsteht aus der Binominalreihe, wenn $x=-1$ gesetzt wird. Nach obigem muß daher m positiv zwischen 0 und ∞ angenommen werden.

Für $m=\frac{3}{2}$ folgt:

$$1-\frac{^3/_2}{1}+\frac{^3/_2\cdot\,^1/_2}{1\cdot 2}-\frac{^3/_2\cdot\,^1/_2(-\,^1/_2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{^3/_2\cdot\,^1/_2(-\,^1/_2)(-\,^3/_2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$
$$-\frac{^3/_2\cdot\,^1/_2(-\,^1/_2)(-\,^3/_2)(-\,^5/_2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$$

oder

$$1-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{48}+\frac{3}{128}+\frac{3}{256}+\cdots$$

Diese Reihe stimmt bis auf die Vorzeichen mit der vorletzten überein; aber vom dritten Glied an sind sämtliche Glieder positiv.

VII. Ueber die Entwicklung der Funktionen in unendliche Reihen.

I. Begriff und Einteilung der Funktionen.

Frage 187. Was ist unter einer unveränderlichen Größe zu verstehen und was unter einer veränderlichen?

Antwort. Wenn im Verlauf derselben Rechnung eine Größe denselben Wert beibehält, so heißt sie unveränderlich oder konstant; im Gegensatz hiezu nennt man eine Größe veränderlich oder variabel, wenn sie im Verlauf derselben Rechnung nach und nach verschiedene Werte annehmen darf.

Gewöhnlich bezeichnet man die konstanten Größen mit den Anfangsbuchstaben $a, b, c, \ldots A, B, C, \ldots \alpha, \beta, \gamma \ldots$ und die veränderlichen Größen mit den Endbuchstaben x, y, z des Alphabets.

Frage 188. Was versteht man unter einer Funktion einer veränderlichen Größe x?

Antwort. Wir bilden einen algebraischen Ausdruck wie $6x - 2$ und setzen $y = 6x - 2$. Geben wir der veränderlichen Größe den Wert 0, so wird $y = -2$; nehmen wir $x = +1$, so wird $y = +4$, für $x = +2$ erhalten wir

$$y = 6 \cdot 2 - 4 = 8$$

usw. Hier ist die Größe y in eine ganz bestimmte Abhängigkeit von der Größe der Veränderlichen x gebracht, und zwar derart, daß

jedem Wert von x ein **bestimmter** Wert von y entspricht. Diese Eigenschaft von y drücken wir dadurch aus, daß wir sagen: Die Größe y sei **eine Funktion** der veränderlichen Größe x.

Nehmen wir:

$$y = \cos x,$$

so folgt für $x = 0^0$, $y = 1$; für $x = 30^0$ wird $y = 0{,}87$; für $x = 60^0$ wird $y = 0{,}5$, und für $x = 90^0$ erhalten wir $y = 0$; auch hier ist y eine Funktion der veränderlichen Größe x.

Geradeso liegt der Fall in den Beispielen:

$$y = 3x^3 - 2x^2 + 7$$

$$y = 5^x - 2$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = log\ x + \frac{1}{3}$$

$$y = a^x + b\ tg\, x - x^c$$

Es ist klar, daß diese Ausdrücke ihre Werte mit x ändern, d. h. daß jedem anderen Wert von x im allgemeinen ein bestimmter (oder mehrere bestimmte Werte) von y entsprechen; obige Ausdrücke stellen also ebenfalls Funktionen der veränderlichen Größe dar. Hienach können wir **allgemein** sagen:

Eine veränderliche Größe y ist eine Funktion einer anderen veränderlichen Größe x, wenn die verschiedenen Werte von y nach einem bestimmten Gesetz von den verschiedenen Werten der veränderlichen Größe x abhängig sind.

Erkl. 126. Beispiele für Funktionen sind:

Der Umfang eines Kreises ist eine Funktion des Halbmessers.

Der Rauminhalt einer Kugel ist eine Funktion des Kugelhalbmessers.

Der Fallraum eines Körpers ist eine Funktion der Fallzeit.

Die Spannkraft des Dampfes in einem Kessel ist eine Funktion seiner Temperatur.

Manchmal ist über die Natur des Abhängigkeitsverhältnisses nichts vorgeschrieben; in diesem Sinne ist das Gedeihen der Früchte eine Funktion des Wetters; überhaupt jede Erscheinung eine Funktion der sie bedingenden Ursachen, ohne daß wir imstande wären, das Abhängigkeitsgesetz durch eine mathematische Formel auszudrücken.

Frage 189. Wie werden die Funktionen eingeteilt?

Antwort. Man teilt die Funktionen ein in **algebraische** und **transcendente**. Es ist y eine **algebraische Funktion** der ver-

Erkl. 127. Beispiele von algebraischen Funktionen sind:

$$y = 4x^2 - 2\sqrt{x} + x^3\sqrt[4]{x}$$

$$y = \frac{8x^7 - 5}{3x - 4} + 8x - 7$$

$$y = \sqrt{x} + 1$$

Beispiele von transcendenten Funktionen sind:

$$y = \cos x - \frac{x}{3}, \quad y = e^x$$

$$y = \log (x + 1)$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{4x}{5}$$

$$y = \sin x + \log \cos x$$

$$y = \frac{3}{3} e^x - \operatorname{tg} x \text{ etc.}$$

Erkl. 128. Die Bezeichnung „transcendent" hat darin ihren Grund, daß man annahm, die Berechnung derselben sei mit den Mitteln der gewöhnlichen Algebra nicht möglich.

änderlichen Größe x, wenn y durch eine Gleichung in x ausgedrückt wird, bei deren Bildung nur Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelausziehung verwendet sind. So ist

$$y = A + Bx^\alpha + Cx^\beta - Dx^\gamma$$

eine algebraische Funktion von x, wenn A, B, C, D konstante Zahlen und die Exponenten α, β, γ beliebige, positive und negative, ganze oder gebrochene konstante Zahlen vorstellen.

Wenn dagegen x als Exponent oder unter einem logarithmischen oder trigonometrischen Funktionszeichen vorkommt wie in a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \sin x$ etc., so heißt der Ausdruck transcendent, und y ist durch eine transcendente Funktion der veränderlichen Größe x dargestellt.

Frage 190. Wie werden die algebraischen Funktionen eingeteilt?

Erkl. 129. Ganze rationale Funktionen des ersten Grades sind:

$$y = 4x - 3$$
$$y = \tfrac{3}{5}x - 8$$
$$y = 7 - \tfrac{5}{10}x$$
$$y = 0{,}79 - \tfrac{3}{13}x$$

Solche zweiten Grades sind:

$$y = 2 - 3x + 4x^2$$
$$y = \tfrac{40}{53}x^2 - 2x + 17$$

Solche dritten Grades sind:

$$y = 1 - 2x + 3x - 4x$$
$$y = \tfrac{2}{17} - \tfrac{4}{13}x + \tfrac{8}{19}x^2 - \tfrac{5}{11}x^3$$
$$y = 7x^3 - 8x^2 + 3x - 9 \text{ etc.}$$

Gebrochene rationale Funktionen sind:

$$y = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x}$$

$$y = \frac{4 - 7x}{8 + 5x}$$

$$y = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2}{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3}$$

$$y = \frac{7 - 5x + 8x^2}{4 - 2x + 18x^2 - 5x^3} \text{ usw.}$$

Antwort. Man teilt die algebraischen Funktionen ein in rationale und irrationale, und die ersteren werden weiter eingeteilt in ganze rationale und gebrochene rationale Funktionen.

Die ganzen rationalen Funktionen werden aus der unabhängigen veränderlichen Größe x und aus konstanten Größen gebildet durch Addition, Subtraktion und Multiplikation unter Ausschluß der Division und der Wurzelausziehung. Die allgemeine Form einer ganzen rationalen Funktion ist also

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

dabei stellen a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n$ positive oder negative, ganze oder gebrochene konstante Zahlen vor; dagegen müssen die Exponenten von x ganze, positive Zahlen sein.

So ist $y = a_0 + a_1 x$ eine ganze rationale Funktion ersten Grades,

Erkl. 130. Ist $y = \frac{1}{x} - \frac{1-x}{x^2}$ gegeben, so erhält man daraus:

$$y = \frac{x-(1-x)}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2}.$$

Hat man:

$$y = \frac{7x+3a}{6ax-2a^2} - \frac{3x-4b}{9x^2+3ax} + \frac{5x^2-3ax}{27x^3-3a^2x}$$

so ergibt die algebraische Umrechnung:

$$y = \frac{63x^3+40ax^2-24a^2x-8a^3}{54ax^3-6a^3x}$$

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ eine solche **zweiten** Grades,

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

eine solche **dritten** Grades der unabhängigen Veränderlichen x usw. Ist allgemein n der **höchste** Exponent der Veränderlichen x, so heißt die Funktion vom $\underline{\underline{n^{ten}}}$ Grad.

Eine **gebrochene rationale** Funktion tritt auf, wenn bei der Bildung außer der Addition, Subtraktion und Multiplikation auch noch die Division Anwendung findet.

Jede **gebrochene** rationale Funktion läßt sich als Quotient von zwei ganzen rationalen Funktionen darstellen oder es läßt sich nach den Regeln der Buchstabenrechnung jede gebrochene rationale Funktion auf die Form bringen:

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m},$$

wo sowohl der Zähler als auch der Nenner **ganze** rationale Ausdrücke der unabhängigen veränderlichen Größe x sind.

Bei der Bildung einer **irrationalen** Funktion wird außer den obigen vier Operationen auch noch die Wurzelausziehung sowohl aus der unabhängigen Größe x selbst, als auch aus zusammengesetzten Ausdrücken, welche x enthalten, angewendet.

Beispiele hierfür sind:

$$y = \sqrt[2]{x^7} = x^{7/2}$$

$$y = \sqrt[4]{7x^3-5} = (7x^3-5)^{1/4}$$

$$y = \frac{\sqrt[5]{x}+8}{\sqrt[12]{x} - 5\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{8x^{1/2} - 5x^{3/4} + 2}{4x^{2/7} - 13}}$$

Frage 191. Wenn y als eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x gegeben ist, läßt sich noch welcher Unterschied in der Form feststellen?

Antwort. Es kann y in der Form

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

d. h. als eine ganze rationale Funktion der unabhängigen Veränderlichen x gegeben sein; dann sagt man, es sei die Funktion entwickelt; hat dagegen in $y = f(x)$ die rechte Seite $f(x)$ irgend eine andere Form, so heißt die Funktion unentwickelt; Beispiele für unentwickelte Funktionen sind:

$$y = (1+x)^3, \quad y = 2^x,$$
$$y = \log\,(1-x) \text{ usw.}$$

Frage 192. Lassen sich unentwickelte Funktionen in entwickelte verwandeln?

Antwort. Nehmen wir $y = (1+x)^3$, so gibt der binomische Lehrsatz die Entwicklung:

$$y = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Ist gegeben $y = (3 - 2x + 5x^2)^3$, so liefert der polynomische Lehrsatz:

$$y = 27 - 54x + 171x^2 - 188x^3 + 285x^4$$
$$- 150x^5 + 125x^6$$

Man sieht also: Besteht die unentwickelte Funktion aus Produkten oder Potenzen von mehrgliedrigen Ausdrücken, welche x nur mit ganzen positiven Exponenten enthalten, so macht die Entwicklung keinerlei Schwierigkeit und man erhält eine geschlossene rationale Funktion von der veränderlichen Größe x.

Nehmen wir nun die gebrochene rationale Funktion $y = \frac{1}{(1+x)^3}$, so gibt das gewöhnliche Divisionsverfahren:

$$y = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \cdots;$$

die Entwicklung führt also auf eine unendliche Reihe, welche nur brauchbar ist, wenn sie konvergiert.

Erkl. 131. Es ist

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{1 + 3x + 3x^2 + x^3}$$

dies ergibt:

$$\begin{array}{l|l|l}
1 + 3x + 3x^2 + x^3 & +1 & 1 - 3x + 6x^2 - \ldots \\
 & -1 - 3x - 3x^2 - x^3 & \\
 & \quad - 3x - 3x^2 - x^3 & \\
 & \quad + 3x + 9x^2 + 9x^3 + 3x^4 & \\
 & \qquad + 6x^2 + 8x^3 + 3x^4 & \\
 & \qquad - 6x^2 - 18x^3 - 18x^4 - 6x^5 & \\
 & \qquad\qquad - 10x^2 - 15x^4 - 6x^5 & \\
 & \qquad\qquad \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot &
\end{array}$$

Siehe Kleyer, Buchstabenrechnung.

Erkl. 132. Es wird

$$\begin{array}{l}
\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \ldots \\
+1 \\
\hline
\quad 2 \mid x \\
\quad\; + x + \tfrac{1}{4}x^2 \\
\quad 2 + x \mid - \tfrac{1}{4}x^2 \\
\qquad\quad - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{1}{64}x^4 \\
\hline
\quad 2 + x - \tfrac{1}{4}x^2 \mid + \tfrac{1}{8}x^3 - \tfrac{1}{64}x^4 \\
\qquad \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot
\end{array}$$

Siehe Kleyer, Buchstabenrechnung.

Wählen wir nun

$$y = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2},$$

so gibt das gewöhnliche Verfahren der Quadratwurzelausziehung:

$$y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots$$

d. h. die Entwicklung führt auch hier auf eine unendliche Reihe in der Veränderlichen x, und es ist diese Reihe in erster Linie auf ihre Konvergenz zu prüfen.

Wir sehen aus diesen Beispielen, daß die Entwicklung einer unentwickelten Funktion, wenn sie überhaupt möglich ist, entweder zu einem geschlossenen ganzen rationalen Ausdruck oder zu einer unendlichen Potenzreihe der Veränderlichen x führt.

Bei der Lösung der Aufgabe, eine unentwickelte Funktion zu entwickeln, d. h. sie in der Form einer nach Potenzen von x fortschreitenden Potenzreihe darzustellen, ist man aber nicht auf die zu umständlichen Rechnungen führenden und oft verversagenden Methoden der Division und Wurzelausziehung beschränkt; es gibt hiebei ein allgemeines Verfahren, welches im folgenden Abschnitt erläutert werden soll.

2. Methode der Koeffizientenvergleichung.

Frage 193. Worin besteht die Methode der Koeffizientenvergleichung oder — wie sie auch heißt — die Methode der unbestimmten Koeffizienten?

Erkl. 133. Diese Methode wurde von Cartesius angegeben. René Descartes, gewöhnlich Cartesius genannt, ist geboren 1596 zu Lahaye in Touraine und gestorben 1650 in Stockholm.

Antwort. Wir knüpfen an ein bestimmtes Beispiel an: Es soll die gebrochene Funktion

$$y = \frac{2+5x}{1+2x-3x^2}$$

in eine nach Potenzen von x fortschreitenden Reihe entwickelt werden. Daß dies möglich ist, zeigt die gewöhnliche Division, welche

$$y = 2 + x + 4x^2 - 5x^3 + \cdots$$

Erkl. 134. Das Divisionsverfahren gibt:

$$
\begin{array}{l}
(2 + 5x) : (1 + 2x - 3x^2) = 2 + x + 4x^2 - 5x^3 + \ldots \\
\underline{-2 - 4x + 6x^2} \\
\quad + x + 6x^2 \\
\quad \underline{- x - 2x^2 + 3x^3} \\
\qquad + 4x^2 + 3x^3 \\
\qquad \underline{- 4x^2 - 8x^3 + 12x^4} \\
\qquad\quad - 5x^3 + 12x^4 \\
\qquad\quad \underline{+ 5x^3 + 10x^4 - 15x^5} \\
\qquad\qquad + 22x^4 - 15x^5 \\
\qquad\qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}
$$

ergibt; wie diese Reihe fortgesetzt werden kann ohne Weiterführung der Division, ist nicht ersichtlich, weil die konstanten Größen 2,1,4,−5.. kein Gesetz erkennen lassen.

Deshalb setzen wir

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

und suchen nun die unbekannten Koeffizienten a_0, a_1, $a_2 \ldots$ zu bestimmen.

Da

$$\frac{2 + 5x}{1 + 2x - 3x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

sein soll, so folgt:

$$2 + 5x = (1 + 2x - 3x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$$

Wird rechts die Multiplikation wirklich ausgeführt, so kommt heraus:

$$2 + 5x = a_0 + (a_1 + 2a_0)x + (a_2 + 2a_1 - 3a_0)x^2 + (a_3 + 2a_2 - 3a_1)x^3 + (a_4 + 2a_3 - 3a_2)x^4 + \cdots$$

Wir erzielen nun vollständige Übereinstimmung beider Seiten, indem wir setzen:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2 \\
a_1 + 2a_0 &= 5 \\
a_2 + 2a_1 - 3a_0 &= 0 \\
a_3 + 2a_2 - 3a_1 &= 0 \\
a_4 + 2a_3 - 3a_2 &= 0 \text{ u. s. f.}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2 \\
a_1 &= 5 - 2a_0 = 5 - 4 = 1 \\
a_2 &= 3a_0 - 2a_1 = 6 - 2 = 4 \\
a_3 &= 3a_1 - 2a_2 = 3 - 8 = -5 \\
a_4 &= 3a_2 - 2a_3 = 12 + 10 = 22 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Nun sehen wir, daß sein muß:

$$
\begin{aligned}
a_5 &= 3a_3 - 2a_4 = -15 - 44 = -59 \\
a_6 &= 3a_4 - 2a_5 = 66 + 118 = 184 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

allgemein $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-1}$.

Unser Resultat lautet jetzt:

$$y = 2 + x + 4x^2 - 5x^3 + 22x^4 - 59x^5 + 184x^6 - \cdots$$

Ein Blick über diese Rechnung lehrt uns, daß wir die unbekannten Koeffizienten a_0, a_1, $a_2 \ldots$ dadurch bestimmen konnten, daß wir beiderseits die Koeffizienten der gleich hohen Potenzen von x gleich gesetzt haben; da links nur die Potenzen x^0 und x^1 vorkommen, so sind rechts die Koeffizienten von x^2, x^3, x^4 gleich null angenommen worden.

Aufgabe 332. Entwickle nach dem vorigen Beispiel $y = \frac{x^3 - 3x + 2}{(x-1)^2}$

Auflösnng. Wir setzen

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

und erhalten:

$$(x^3 - 3x + 2) = (x-1)^2 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x^2 - 2x + 1)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$$

oder

$$2 - 3x + 0 \cdot x^2 + x^3 = a_0 + (a_1 - 2a_0)x + (a_2 - 2a_1 + a_0)x^2 + (a_3 - 2a_2 + a_1)x^3 + (a_4 - 2a_3 + a_2)x^4 + (a_5 - 2a_4 + a_3)x^5 + \cdots$$

Wir müssen hienach annehmen:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 - 2a_0 &= -3; \\ a_2 - 2a_1 + a_0 &= 0 \\ a_3 - 2a_2 + a_1 &= 1 \\ a_4 - 2a_3 + a_2 &= 0 \\ a_5 - 2a_4 + a_3 &= 0 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 2a_0 - 3 = 4 - 3 = +1 \\ a_2 &= 2a_1 - a_0 = 2 - 2 = 0 \\ a_3 &= 2a_2 - a_1 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0 \\ a_4 &= 2a_3 - a_2 = 0 \\ a_5 &= 2a_4 - a_3 = 0 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hienach ist $y = 2 + x$

Erkl. 135. Das nebenstehende Resultat läßt sich auf folgende Weise ableiten:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3 - 3x + 2}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - x - 2x + 2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x(x^2 - 1) - 2(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x(x+1) - 2}{x - 1} \\ &= \frac{x^2 + 2x - x - 2}{x - 1} = \frac{x(x+2) - (x+2)}{x - 1} \\ &= \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = x + 2. \end{aligned}$$

Frage 194. Auf welchen Satz stützt sich die eben angewandte Methode?

Antwort. Der Methode der Koeffizientenvergleichung liegt folgender **Satz** zugrunde:

Wenn zwei Potenzreihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \text{ und}$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

innerhalb eines die Null enthaltenden Gebietes zugleich konvergieren und für jeden diesem Gebiet angehörigen Wert x dieselbe Summe haben, so müssen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich sein, also $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ usw.

Frage 195. Wie läßt sich dieser Satz von der Koeffizientengleichheit beweisen?

Erkl. 136. Die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

konvergiert nach Frage 185, wenn der Grenzwert von $\frac{a_{n+1} \cdot x}{a_n}$ für $n = \infty$ unter 1 liegt. Auf die nämliche Bedingung führt auch die Konvergenz von der II. Potenzreihe $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots$ Mit anderen Worten: Innerhalb des Konvergenzgebietes der I. Reihe konvergiert auch die II. Reihe $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots$; die III. Reihe $a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \ldots$ usw.

Antwort. Setzen wir in

$$a_0 + x\left\{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots\right\} = b_0 + x\left\{b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots\right\}$$

beiderseits $x = 0$, so folgt, da die Klammern für $x = 0$ eine bestimmte endliche Summe geben, $a_0 = b_0$. Hieraus folgt jetzt, daß für jeden Wert von x innerhalb des Konvergenzgebietes die Gleichung besteht:

$$x\left\{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots\right\} = x\left\{b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots\right\}$$

und deshalb

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots$$

sein muß, oder man hat:

$$a_1 + x\left\{a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \cdots\right\} = b_1 + \left\{b_2 + b_3 x + \cdots\right\}$$

Nehmen wir hier $x = 0$, so ergibt sich

$$a_1 = b_1 \text{ und}$$
$$a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \cdots = b_2 + b_3 x + b_4 x^2 + \cdots$$

Daraus schließen wir auf

$$a_2 = b_2,\ a_3 = b_3 \text{ usw.}$$

Aufgabe 333. Welche Werte müssen die Koeffizienten $a, b, c, d..$ haben, wenn für jeden Wert von x, $x = 0$ eingeschlossen,

$$1 + ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$$
$$= a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + \cdots$$

sein soll?

Auflösung. Nach dem Satz des Cartesius muß sein:

$$a = 1$$
$$2b = a$$
$$3c = b$$
$$4d = c$$
$$\cdots\cdots$$

Daraus folgt $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, $d = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ u. s. f. Die 2 gegebenen Reihen sind hienach identisch mit der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Siehe Aufgabe 316.

Aufgabe 334. Für den gleichen Ausdruck hat man das eine Mal die unendliche Reihe

$$1 + ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$$

und das andere Mal die unendliche Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

gefunden, welche beide für dasselbe die Null enthaltende Konvergenzgebiet richtig sein sollen. Welche Werte haben die Koeffizienten a, b, c?

Auflösung. Die Koeffizientenvergleichung liefert die Gleichungen

$$a = 1$$
$$b = a = 1$$
$$c = b = 1$$
$$b = c = 1$$
$$\cdots\cdots$$

Die beiden gegebenen Reihen sind also identisch mit der Potenzreihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Siehe Aufgabe 307.

Frage 196. Wie läßt sich mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten eine gebrochene Funktion

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + \cdots + Rx^n}{A_1 + B_1x + C_1x^3 + \cdots + Q_1x^m}$$

in eine Potenzreihe von x entwickeln?

Antwort. Wir setzen die gegebene gebrochene Funktion gleich der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots;$$

hierauf multiplizieren wir beiderseits mit

$$A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \cdots + Q_1 x^m$$

durch und erhalten:

$$A + Bx + Cx^2 + \cdots + Rx^n$$
$$= (A_1 + B_1x + C_1x^2 + \cdots + Q_1x^m)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

Nun multiplizieren wir rechts aus und ordnen nach steigenden Potenzen von x; dies gibt:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots + Rx^n = a_0 A_1 + (a_0 B_1 + a_1 A_1)x$$
$$+ (a_0 C_1 + a_1 B_1 + a_2 A_1)x^2 + (a_0 D_1 + a_1 C_1 + a_2 B_1 + a_3 A_1)x^3 + \cdots$$

Erkl. 137. Die ganze Funktion n^{ten} Grades

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^n$$

kann als eine unendliche Potenzreihe angesehen werden, in welcher die Koeffizienten von den Potenzen x^{n+1}, x^{n+2}, x^{n+3} usw. sämtlich gleich Null sind.

Da nun die Koeffizienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten gleich sein müssen, folgt

$$a_0 A_1 = A$$
$$a_0 B_1 + a_1 A_1 = B$$
$$a_0 C_1 + a_1 B_1 + a_2 A_1 = C$$
$$a_0 D_1 + a_1 C_1 + a_2 B_1 + a_3 A_1 = D$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{№ } 47$$

Dies geht in dieser Weise fort bis zur Potenz x^n einschließlich. Da linker Hand keine höhere Potenz auftritt, so müs en auf der rechten Seite die Koeffizienten von x^{n+1}, x^{n+2}, x^{n+3} usw. sämtlich den Wert Null haben. Hiemit gewinnen wir ein System von Gleichungen, aus welchen wir nicht bloß die Werte von a_0, a_1, $a_2 \ldots$ berechnen können, sondern auch das Gesetz aufzustellen vermögen, nachdem diese Koeffizienten gebildet sind. Dabei müssen wir aber dann noch jedesmal durch eine Konvergenzuntersuchung die Berechtigung nachweisen, die gegebene Funktion der gefundenen Reihe gleich zu setzen und das Gebiet feststellen, innerhalb dessen die Reihe den Wert der Funktion darstellt.

Die praktische Durchführung sollen folgende Beispiele zeigen:

Aufgabe 335. Es soll $\frac{1}{1 + x + x^2}$ in eine Potenzreihe entwickelt werden.

Auflösung. Hier ist $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ usw., $A_1 = 1$, $B_1 = 1$, $C_1 = 1$, $D_1 = 0$, $E_1 = 0$ usw.

Wir setzen:

$$\frac{1}{1 + x + x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

und erhalten

$$1 = (1 + x + x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

$$1 = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2 + a_3)x^3 + (a_2 + a_3 + a_4)x^4 + \cdots$$

Da nun links vom Gleichheitszeichen die Koeffizienten von x, x^2, x^3, x^4... sämtlich gleich Null sind, so liefert die Koeffizientenvergleichung:

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &a_0 + a_1 = 0 \\ &a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ &a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ &a_2 + a_3 + a_4 = 0 \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Daraus leiten wir ab:

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,$$
$$a_4 = -1,\ a_5 = 0,\ a_6 = 1,\ a_7 = -1,$$
$$a_8 = 0 \text{ usw.}$$

Also ist:

$$\frac{1}{1 + x + x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \cdots$$

aber nur für solche Werte von x, für welche die erhaltene Reihe konvergiert. Zur Bestimmung der Konvergenz schreiben wir sie in der Form:

$$(1 - x)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$

und sehen jetzt, daß die Konvergenz von derjenigen der Reihe

$$1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots$$

abhängt. Da letztere nur für solche x, deren absoluter Betrag unter der Einheit liegt, konvergiert, so ist die vorhin vollzogene Gleichsetzung der gebrochenen Funktion mit der unendlichen Reihe an die Bedingung geknüpft, daß die Veränderliche x zwischen den Grenzen -1 und $+1$, mit Ausschluß der letzteren gewählt wird.

Aufgabe 336. Ebenso $\frac{1}{(1+x)^3}$.
(Siehe Erkl. 131).

Auflösung. Wir nehmen:

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{1+3x+3x^2+x^3} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

und erhalten:

$$1 = (1+3x+3x^2+x^3)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

$$1 = a_0 + (3a_0 + a_1)x + (3a_0 + 3a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3)x^3$$
$$+ (a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4)x^4 + (a_2 + 3a_3 + 3a_4 + a_5)x^5$$

Da linker Hand die Koeffizienten von x, x^2, x^3 usw. sämtlich gleich Null sind, liefert die Koeffizientenvergleichung:

$$a_0 = 1$$
$$3a_0 + a_1 = 0$$
$$3a_0 + 3a_1 + a_2 = 0$$
$$a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3 = 0$$
$$a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4 = 0$$
$$a_2 + 3a_3 + 3a_4 + a_5 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus folgt nun:

$$a_0 = 1,\quad a_1 = -3,\quad a_2 = +6,$$
$$a_3 = -10,\quad a_4 = +15,\quad a_5 = -21$$

usw., also allgemein:

$$a_n = (-1)^n \cdot \binom{n+2}{2}.$$

Unsere Reihe lautet jetzt:

$$1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5 + \cdots + (-1)^n \binom{n+2}{2} x^n$$
$$+ (-1)^{n+1} \binom{n+3}{2} x^{n+1} + \cdots$$

Zur Untersuchung ihrer Konvergenz setzen wir:

$$u_n = (-1)^n \binom{n+2}{2} x^n \text{ und}$$

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1} \binom{n+3}{2} x^{n+1}.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty}\left\{-\frac{n+3}{n+1}x\right\} = \lim_{n=\infty}\left\{-\left(1+\frac{2}{n+1}\right)x\right\} = -x.$$

Daraus schließen wir, daß die Reihe konvergiert für $-1 < x < +1$ und unter dieser Bedingung ist:

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \cdots \text{ ad infinitum.}$$

Aufgabe 337. Ebenso $\frac{2+3x}{1+3x+2x^2}$

Auflösung. Wir setzen wieder

$$\frac{2+3x}{1+3x+2x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

und bilden:

$$2+3x = (1+3x+2x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$$
$$= a_0 + (3a_0 + a_1)x + (2a_0 + 3a_1 + a_2)x^2 + (2a_1 + 3a_2 + a_3)x^3 + (2a_2 + 3a_3 + a_4)x^4 + \cdots$$

Die Koeffizientenvergleichung gibt jetzt:

$$a_0 = 2$$
$$3a_0 + a_1 = 3$$
$$2a_0 + 3a_1 + a_2 = 0$$
$$2a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \text{ usw.}$$

Daraus folgt:

$$a_0 = 2,\quad a_1 = -3,\quad a_2 = +5,\quad a_3 = -9,\quad a_4 = +17,\quad a_5 = -33\ldots$$

Hieraus folgt, daß

$$\frac{2+3x}{1+3x+2x^2} = 2 - 3x + 5x^2 - 9x^3 + 17x^4 - 33x^5 + \cdots$$

unter der Voraussetzung, daß nur solche Werte für x gewählt werden, welche innerhalb des Konvergenzgebietes der gefundenen unendlichen Potenzreihe liegen; d. h. für

$$-1 < x < +1.$$

Erkl. 138. Ist verlangt, das allgemeine Glied u_n der Potenzreihe oder $a_n x^n$ zu berechnen, so kann dies in folgender Weise geschehen.

Es ist

$$a_2 = -(2a_0 + 3a_1)$$
$$a_3 = -(2a_1 + 3a_2) = 6a_0 + 7a_1$$
$$a_4 = -(2a_2 + 3a_3) = -(14a_0 + 15a_1)$$
$$a_5 = -(2a_3 + 3a_4) = 30a_0 + 31a_1$$
$$a_6 = -(2a_4 + 3a_5) = -(62a_0 + 63a_1)$$
$$a_7 = -(2a_5 + 3a_6) = 126a_0 + 127a_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Zahlen 2, 6, 14, 30, 62, 126 .... bilden eine arithmetische Reihe

$$\begin{array}{cccccc}
2 \\
 & 4 \\
6 & & 4 \\
 & 8 & & 4 \\
14 & & 8 & & 4 \\
 & 16 & & 8 & & 4 \\
30 & & 16 & & 8 \\
 & 32 & & 16 \\
62 & & 32 \\
 & 64 \\
126
\end{array}$$

mit $y_1 = 2$, $\triangle y_1 = 4$, $\triangle^2 y_1 = 4$, $\triangle^3 y = 4$, $\triangle^4 y_1 = 4$, $\triangle^5 y_1 = 4$.

Ebenso ist das gleiche mit den Zahlen 3, 7, 15, 31, 63, 127 usw. der Fall mit

$$y_1 = 3;$$
$$\triangle y_1 = \triangle^2 y_1 = \triangle^3 y_1 = \triangle^4 y_1 = \triangle^5 y_1 = 4.$$

Hiermit ist das Mittel gewonnen, a_n auszudrücken. Die weitere Ausführung dieser Rechnung, sowie die Auffindung der Konvergenzbedingung bleibt dem Leser überlassen.

Preis des Heftes 25 Pfg.

Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. **A. Haas.**

Heft 17

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz

Aufgabe 338. Ebenso

$$\frac{1+3x+5x^2+7x^3+\cdots}{1-x+x^2-x^3+\cdots}.$$

Auflösung. Soll diese gebrochene Funktion zulässig sein, so müssen Zähler und Nenner konvergieren, was zutrifft für $-1<x<+1$. Setzen wir dieselbe wieder

$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,$$

so folgt:

$$\begin{aligned}1+3x+5x+7x^3+\cdots &= (1-x+x^2-x^3+\cdots)\cdot(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)\\ &= a_0\\ &\quad+(a_1-a_0)x\\ &\quad+(a_2-a_1+a_0)x^2\\ &\quad+(a_3-a_2+a_1-a_0)x^3\\ &\quad+(a_4-a_3+a_2-a_1+a_0)x^4+\cdots\end{aligned}$$

Daraus gewinnt man sehr einfach:

$$a_0=1,\ a_1=4,\ a_2=8,\ a_3=12,$$
$$a_4=16 \text{ usw.}$$

Die gesuchte lautet hienach:

$$1+4x+8x^2+12x^3+16x^4+\cdots;$$

sie konvergiert für $-1<x<+1$.

Aufgabe 339. Ebenso $(1+x)^{-m}$, wenn m eine ganze positive Zahl vorstellt.

Auflösung. Wir nehmen

$$(1+x)^{-m}=\frac{1}{(1+x)^m}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_2x^3+\cdots$$

$$1=(1+x)^m(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)$$

Nun kann, da m eine ganze positive Zahl ist, nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt werden; dies gibt:

$$1=\left(1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\cdots\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right)$$

oder

$$\begin{aligned}1&=a_0\\ &\quad+\left\{\binom{m}{1}a_0+a_1\right\}x\\ &\quad+\left\{\binom{m}{2}a_0+\binom{m}{1}a_1+a_2\right\}x\\ &\quad+\left\{\binom{m}{3}a_0+\binom{m}{2}a_1+\binom{m}{1}a_2+a_3\right\}x^3+\cdots\end{aligned}$$

Erkl. 139. Schreiben wir rechts vom Gleichheitszeichen:

$$\frac{m(m+1)}{1.2} = \frac{(-m)(-m-1)}{1.2}$$

$$-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} = \frac{(-m)(-m-1)(-m-2)}{1.2.3}$$

usw., so folgt

$$(1+x)^{-m} = 1 + \binom{-m}{1} x + \frac{(-m)(-m-1)}{1.2} x^2 + \frac{(-m)(-m-1)(-m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

Jetzt hat die rechte Seite die Form des binomischen Lehrsatzes; dieser behält hienach seine Giltigkeit, wenn der Exponent des Binoms $1+x$ eine ganze negative Zahl ist.

Daraus folgt:

$$a_0 = 1$$

$$\binom{m}{1} a_0 + a_1 = 0$$

$$\binom{m}{2} a_0 + \binom{m}{1} a_1 + a_2 = 0$$

$$\binom{m}{3} a_0 + \binom{m}{2} a_1 + \binom{m}{1} a_2 + a_3 = 0$$

. . . .

Die Ausrechnung liefert jetzt:

$$a_0 = 1;\quad a_1 = -m;\quad a_2 = \frac{m(m+1)}{1\cdot 2};$$

$$a_3 = -\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ usw.}$$

Somit ist

$$(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2} x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \cdots$$

unter den Bedingungen, daß m eine ganze Zahl ist und $-1 < x < +1$ ist.

Frage 197. Wie läßt sich die Methode der unbestimmten Koeffizienten zur Wurzelausziehung verwenden?

Erkl. 140. Die Entwicklung von dem Polynom $(a_0 + a_1 + a_2 x^2 + \ldots)^r$ findet der Leser in Frage 54.

Antwort. Soll der Ausdruck

$$y = \sqrt[r]{\frac{A + Bx + Cx^2 + \cdots + Rx^n}{A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \cdots + Q_1 x^m}}$$

wo m, n und r ganze Zahlen vorstellen sollen, in eine Potenzreihe entwickelt werden, so setzen wir:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Daraus liefert die Algebra:

$$A + Bx + Cx^2 + \cdots + Rx^n = (A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \cdots + Q_1 x^m)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^r$$

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^r$ läßt sich nach dem polynomischen Lehrsatz entwickeln in der Form:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots$$

Hiemit wird:

$$A + Bx + Cx^2 + \cdots + Rx^n = (A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \cdots + Q_1 x^m)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots)$$

Nachdem rechts ausmultipliziert und geordnet worden ist, liege vor die Reihe:

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots + \beta_n x^n + \beta_{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

Nun ergibt die Koeffizientenvergleichung:

$$\beta_0 = A,\ \beta_1 = B \ldots \beta_n = R;$$
$$\beta_{n+1} = 0,\ \beta_{n+2} = 0 \text{ usw.}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Werte $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots$ finden; letztere liefern dann die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \ldots$ u. s. f.

Wir beschränken uns hier auf folgende einfache Fälle.

Aufgabe 340. Entwickle

$$\sqrt[2]{\frac{1+2x}{1+x^2}}$$

in eine Potenzreihe.

Erkl. 141. Bekanntlich hat jede Quadratwurzel zwei Werte; diese treten hier auf der rechten Seite auf, wenn $a_0 = +1$ oder $= -1$ genommen wird; hier ist nur der erste Wert berücksichtigt.

Auflösung. Aus

$$\sqrt[2]{\frac{1+2x}{1+x^2}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

folgt:

$$1 + 2x = (1 + x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)^2$$

Nach Aufgabe 106 ist

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2)x^3 + \cdots$$

Daraus erhalten wir:

$$1 + 2x = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_0^2 + 2a_0 a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_0 a_1 + 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2)x^3 + \cdots$$

Dies liefert:

$$a_0^2 = 1$$
$$2a_0 a_1 = 2$$
$$a_0^2 + 2a_0 a_2 + a_1^2 = 0$$
$$2a_0 a_1 + 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Daraus folgt

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 0,$$
$$a_4 = 0,\ a_5 = 1 \text{ u. s. f.}$$

Somit ist

$$\sqrt{\frac{1+2x}{1+x^2}} = 1 + x - x^2 + x^5 + \cdots$$

für $-1 < x < +1$.

Aufgabe 341. Ebenso

$$\sqrt[3]{1+x}.$$

Auflösung. Aus

$$\sqrt[3]{1+x} = a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots$$

rechnen wir nach Aufgabe 107

$$1 + x = (a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots)^3 = a_0{}^3 + 3a_0{}^2 a_1 x + \left\{3a_0{}^2 a_2 + 3a_0 a_1{}^2\right\} x^2$$
$$+ \left\{3a_0{}^2 a_3 + 6a_0 a_1 a_2 + c_1{}^3\right\} x^3 + \cdots$$

Erkl. 142. Da

$$-\frac{1}{9} = \frac{{}^1/_3({}^1/_3 - 1)}{1.2}$$

$$-\frac{5}{81} = \frac{{}^1/_3 \cdot ({}^1/_3 - 1)({}^1/_3 - 2)}{1.2.3}$$

$$-\frac{10}{243} = \frac{{}^1/_3({}^1/_3 - 1)({}^1/_3 - 2)({}^1/_3 - 3)}{1.2.3.4} \text{ u. s. f.}$$

läßt sich schreiben:

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{{}^1/_3}{1} x + \frac{{}^1/_3({}^1/_3 - 1)}{1.2}$$
$$+ \frac{{}^1/_3({}^1/_3 - 1)({}^1/_3 - 2)}{1.2.3} x^3$$
$$+ \frac{{}^1/_3({}^1/_3 - 1)({}^1/_3 - 2)({}^1/_3 - 3)}{1.2.3.4} x^4 + \cdots$$

Hier haben wir also den binomischen Lehrsatz für einen positiven gebrochenen Exponenten.

Dies gibt:

$$a_0 = 1$$
$$3a_0{}^2 a_1 = 1$$
$$3a_0{}^2 a_2 + 3a_0{}^2 a_1{}^2 = 0$$
$$3a_0{}^2 a_3 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1{}^3 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Somit muß sein:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = -\frac{1}{9},$$
$$a_3 = \frac{5}{81},\ a_4 = -\frac{10}{243} \text{ usw.}$$

Wir haben hienach:

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$$
$$+ \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \cdots,$$

falls $x^2 < 1$ ist.

Aufgabe 342. Ebenso für

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}$$

Auflösung. Aus

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

folgern wir:

$$1 = (1-x)^3 \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \right\}^4$$

nach Aufgabe 108 erhalten wir:

$$1 = (1 - 3x + 3x^2 - x^3) \left\{ a_0^4 + 4a_0^3 a_1 x + (4a_0^3 a_2 + 6a_0^2 a_1^2) x^2 \right.$$
$$\left. + (4a_0^3 a_3 + 12 a_0^2 a_1 a_2 + 4a_0 a_1^3) x^3 + \cdots \right\}$$

oder

$$1 = a_0^4 + (4a_0^3 a_1 - 3a_0^4) x + (4a_0^3 a_2 + 6a_0^2 a_1^2 - 12 a_0^3 a_1 - 3a_0^4) x^2 + \cdots$$

Daraus folgt:

$$a_0^4 = 1$$
$$4a_0^3 a_1 - 3a_0^4 = 0$$
$$4a_0^3 a_2 + 6a_0^2 a_1^2 - 12 a_0^3 a_1 + 3a_0^4 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dies gibt jetzt:

$$a_0 = 1,\; a_1 = \frac{3}{4},\; a_2 = \frac{21}{32} \text{ usw.}$$

Somit ist

$$(1-x)^{-3/4} = 1 + \frac{3}{4} x + \frac{21}{32} x^2 + \frac{77}{128} x^3 + \cdots$$

für alle Werte von x zwischen -1 und $+1$.

Erkl. 143. Da

$$\frac{21}{32} = \frac{(-3/4)(-3/4-1)}{1 \,.\, 2}$$

$$\frac{77}{128} = \frac{(-3/4)(-3/4-1)(-3/4-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so folgt:

$$(1-x)^{-3/4} = 1 - \frac{-3/4}{1} x + \frac{(-3/4)(-3/4-1)}{1 \,.\, 2} x^2$$
$$- \frac{(-3/4)(-3/4-1)(-3/4-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^3 + \cdots$$

Hieraus schließen wir, daß der binomische Lehrsatz auch für negative **gebrochene** Exponenten seine Giltigkeit bewahrt.

3. Ungelöste Übungsbeispiele.

Entwickle folgende Funktionen in Reihen, welche nach Potenzen von x fortschreiten:

Aufgabe 343.

$$\frac{20x^4 - 51x^3 - 12x^2 + 32x}{4x^2 - 7x - 8}$$

Aufgabe 344.

$$\frac{60x^5 - 85x^4 + 86x^3 - 69x^2 + 32x - 10}{180x^2 - 120x + 60}$$

Aufgabe 345.

$$\frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{81} x^4}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} x\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} x^2\right)}$$

Aufgabe 346. $\frac{1}{1-x}$

Aufgabe 347. $\frac{1}{1+x}$

Aufgabe 348. $\frac{1}{1-x+x^2}$

Aufgabe 349. $\frac{1+2x}{1-2x+3x^2}$

Aufgabe 350. $\sqrt[2]{1-x}$

Aufgabe 351. $\sqrt[2]{4+3x}$

Aufgabe 352. $\sqrt[2]{3+5x+7x^2}$

Aufgabe 353. $\sqrt[2]{\frac{2+5x}{1-x^2}}$

Aufgabe 354.
$\sqrt[3]{27-10x+8x^2+10x^3}$

Aufgabe 355. $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$

Aufgabe 356. $\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

Aufgabe 357. $\sqrt[4]{16-x^2}$

Aufgabe 358. $\sqrt[4]{\frac{x}{2+4x}}$

Aufgabe 359. $(2-x)^{-2/3}$

Aufgabe 360. $(1+x)^{-3/4}$

Aufgabe 361.
$(2+3x+4x^2+5x^3+\cdots)^{-1/2}$

Aufgabe 362.
$(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots)^{-2/3}$

---

4. Über die Summierung der Binominalreihe.

Frage 198. Welcher Unterschied zeigt sich, wenn man in dem Binominalkoeffizienten $\binom{n}{r}$ das eine Mal für n eine ganze positive Zahl, und ein anderes Mal für n irgend eine andere Zahl annimmt?

Antwort. Nach Aufgabe 19 bedeutet $\binom{n}{r}$ den Wert des Bruches:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r},$$

falls n eine **ganze positive** Zahl vorstellt; z. B. ist für $n=6$ und $r=4$:

$$\binom{6}{4}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=15;$$

ebenso ist:

$$\binom{6}{1}=\frac{6}{1}=6;\quad \binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15;\quad \binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=20;$$

$$\binom{6}{5}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=6;\quad \binom{6}{6}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=1;$$

$$\binom{6}{7}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=0;\quad \binom{6}{8}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=0 \text{ usw.}$$

Daraus ersehen wir, daß, wenn n eine ganze positive Zahl vorstellt $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$ und daß ferner $\binom{n}{n+1} = 0$; $\binom{n}{n+2} = 0$ usw. ist.

Wir können nun die obige Definition von der Größe $\binom{n}{r}$ auf jede **beliebige** Zahl n ausdehnen und also ganz allgemein setzen:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r} \quad \ldots . \text{№ } 53$$

Für $n = \frac{1}{2}$ und $r = 3$ folgt dann:

$$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2\cdot(1/2-1)(1/2-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{16};$$

ebenso für $n = \frac{1}{2}$ und $r = 5$:

$$\binom{1/2}{5} = \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)(1/2-3)(1/2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{7}{256}$$

Wir sehen, daß hier für die ganze positive Zahl r keine Beschränkung besteht, und in $\binom{1/2}{r}$ für r jede ganze Zahl von 1 bis ∞ gewählt werden darf, ohne daß der Wert $\binom{1/2}{r}$ von einer gewissen Grenze ab immer gleich Null wird.

Ist also in $\binom{n}{r}$ die Zahl n ganz beliebig gewählt, so hat $\binom{n}{r}$ für jede ganze positive Zahl r, von 1 an aufwärts, einen von Null verschiedenen Wert.

Aufgabe 363. Berechne $\binom{-3/5}{4}$

Auflösung.

$$\binom{-3/5}{4} = \frac{(-3/5)(-3/5-1)(-3/5-2)(-3/5-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{234}{625}.$$

Aufgabe 364. Ebenso $\binom{2^1/_2}{5}$.

Auflösung.

$$\binom{2^1/_2}{5} = \frac{2^1/_2 \cdot 1^1/_2 \cdot {}^1/_2 \cdot (-{}^1/_2)(-1^1/_2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{3}{256}$$

Aufgabe 365. Ebenso $\binom{\sqrt{2}}{3}$.

Auflösung.

$$\binom{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{2}{3}\sqrt{2} - 1$$

Aufgabe 366. Beweise, daß für jeden Wert von n die Gleichung richtig ist:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1}\frac{n-r+1}{r}.$$

Auflösung. Nach der obigen Definition ist allgemein:

$$\binom{n}{r} = \left\{\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\frac{n-r+2}{r-1}\right\}\frac{n-r+1}{r}.$$

Nun stellt aber die Klammer den Wert von $\binom{n}{r-1}$ vor; woraus die Richtigkeit des Satzes sich ergibt.

Aufgabe 367. Ebenso, daß für jeden Wert von m und von n:

$$\binom{m}{1} + \binom{n}{1} = \binom{m+n}{1} \text{ ist.}$$

Auflösung. Es ist $\binom{m}{1} = m$; $\binom{n}{1} = n$; also:

$$\binom{m}{1} + \binom{n}{1} = m + n = \binom{m+n}{1}.$$

Aufgabe 368. Ebenso, daß allgemein

$$\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{m+2}{2}$$

ist.

Auflösung. Es ist

$$\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$$

$$=\frac{m(m-1)+2mn+n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{m(m-1)+mn+mn+n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{m(m+n-1)+n(m+n-1)}{2}=\frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot 2}$$

$$=\binom{m+n}{2}$$

Aufgabe 369. Ebenso, daß allgemein:

$$\binom{m}{3}+\binom{m}{2}\binom{n}{1}+\binom{m}{1}\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$$

$$=\binom{m+n}{3} \text{ ist.}$$

Auflösung. Es ist

$$\binom{m}{3}+\binom{m}{2}\binom{n}{1}+\binom{m}{1}\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$$

$$=\binom{m}{3}+\binom{m}{2}\binom{n}{1}\cdot\frac{2}{3}+\binom{m}{1}\binom{n}{2}\frac{1}{3}+\binom{m}{2}\binom{n}{1}\frac{1}{3}+\binom{m}{1}\binom{n}{2}\frac{2}{3}+\binom{n}{3}$$

$$=\binom{m}{2}\frac{m-2}{3}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\binom{n}{2}\frac{m}{3}+\binom{m}{2}\frac{n}{3}$$

$$+\binom{m}{1}\binom{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\binom{n}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$$

$$=\binom{m}{2}\cdot\frac{m+n-2}{3}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}\cdot\frac{m+n-2}{3}+\binom{n}{2}\frac{m+n-2}{3}$$

$$=\left\{\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right\}\cdot\frac{m+n-2}{3}$$

$$=\binom{m+n}{2}\cdot\frac{m+n-2}{3}=\binom{m+n}{3}.$$

Aufgabe 370. Ebenso, daß allgemein:

$$\binom{m}{4}+\binom{m}{3}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}+\binom{m}{2}\binom{n}{3}+\binom{n}{4}=\binom{m+n}{4} \text{ ist.}$$

Auflösung. Es ist

$$\binom{m}{4}+\binom{m}{3}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}+\binom{m}{1}\binom{n}{3}+\binom{n}{4}=\binom{m}{4}+\binom{m}{3}\binom{n}{1}\frac{3}{4}$$

$$+\binom{m}{2}\binom{n}{2}\frac{2}{4}+\binom{m}{1}\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{4}+\binom{m}{3}\binom{n}{1}\frac{1}{4}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}\frac{2}{4}$$

$$+\binom{m}{1}\binom{n}{3}\cdot\frac{3}{4}+\binom{n}{4}$$

$$=\binom{m}{3}\frac{m-3}{4}+\binom{m}{2}\binom{n}{1}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\binom{m}{1}\binom{n}{2}\frac{m-1}{2}\cdot\frac{2}{4}+\binom{n}{3}\cdot\frac{m}{4}$$

$$+\binom{m}{3}\cdot\frac{n}{4}+\binom{m}{2}\binom{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{4}+\binom{m}{1}\binom{n}{2}\frac{n-2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\binom{n}{3}\frac{n-3}{4}$$

$$=\binom{m}{3}\frac{m+n-3}{4}+\binom{m}{2}\binom{n}{1}\cdot\frac{m+n-3}{4}+\binom{m}{1}\binom{n}{2}\frac{m+n-3}{4}+\binom{n}{3}\frac{m+n-3}{4}$$

$$=\left\{\binom{m}{3}+\binom{m}{2}\binom{n}{1}+\binom{m}{1}\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right\}\cdot\frac{m+n-3}{4}$$

$$=\binom{m+n}{3}\cdot\frac{m+n-3}{4}=\binom{m+n}{4}$$

Aufgabe 371. Ebenso, daß allgemein:

$$\binom{m}{5}+\binom{m}{4}\binom{n}{1}+\binom{m}{3}\binom{n}{2}+\binom{m}{2}\binom{n}{3}+\binom{m}{1}\binom{n}{4}+\binom{n}{5}=\binom{m+n}{5}.$$

Auflösung. Die Entwicklung möge der Leser selbst bilden mittelst der in den vorhergehenden Auflösungen gezeigten Zerlegungen.

Frage 199. Welche Folgerung läßt sich aus den vorhergehenden Gleichungen ziehen?

Antwort. Stellen m und n zwei ganz b e l i e b i g e Z a h l e n vor.

und bezeichnet r eine positive ganze Zahl, so ist stets:

$$\binom{m}{r}+\binom{m}{r-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{r-2}\binom{n}{2}+\binom{m}{r-3}\binom{n}{3}+\cdots=\binom{m+n}{r}$$

Die Richtigkeit dieser Formel direkt zu zeigen mittelst der obigen Zerlegungen bleibt dem Leser überlassen.

Frage 200. Welche Summe liefert die Binominalreihe

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots ?$$

Erkl. 144. Wählen wir $n=6$, so lautet die Binominalreihe

$$1+\binom{6}{1}x+\binom{6}{2}x^2+\ldots+\binom{6}{6}x^6+\binom{6}{7}x^7 + \binom{6}{8}x^8+\ldots$$

Da aber

$$\binom{6}{7}=\frac{6.5.4.3.2.1.0}{1.2.3.4.5.6.7}=0$$

$$\binom{6}{8}=\frac{6.5.4.3.2.1.0(-1)}{1.2.3.4.5.6.7.8}=0$$

u. s. f. ist, so fallen alle auf $\binom{6}{6}x^6$ folgenden Glieder weg und es bleibt nur:

$$1+\binom{6}{1}x+\binom{6}{2}x^2+\ldots+\binom{6}{6}x^6=(1+x)^6$$

Antwort. Nehmen wir die Zahl n ganz und positiv an, so bricht die Reihe an einer Stelle von selbst ab, denn alle auf $\binom{n}{n}$ folgenden Binominalkoeffizienten $\binom{n}{n+1}$, $\binom{n}{n+2}$ ... haben im Zähler den Faktor $n-n$, und sind daher sämtlich gleich Null; somit verschwinden alle auf $\binom{n}{n}x^n$ folgenden Glieder, und es bleibt nur übrig:

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

Nach dem binomischen Lehrsatz ist diese Summe für jeden Wert von x bekanntlich $=(1+x)^n$.

Wenn wir nun der Zahl n einen Wert beilegen, der nicht ganz und positiv, sondern negativ oder gebrochen oder irrational ist, so kommt in den Zählern der Binominalkoeffizienten nirgends der Faktor $n-n$ als Faktor vor; die Binominalkooeffizienten sind also alle von Null verschieden, und die Reihe wird eine unendliche. Von ihr haben wir nachgewiesen, daß sie konvergiert, wenn

$$-1<x<+1$$

ist (Siehe Aufgabe 329). Nun erhebt sich die Frage nach der Summe dieser Reihe, wenn wir der Größe x einen bestimmten Wert beilegen, welcher zwischen -1 und $+1$ liegt.

Eine beliebige Zahl n, die nicht positiv und ganz sein soll, liefere die Summe s_n, eine zweite derartige Zahl m liefere für die nämliche Größe x die Summe s_m, so daß

$$s_n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots$$

$$s_m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots$$

ist. Da wir x innerhalb des Konvergenzgebietes angenommen vorstellen, so haben wegen der Konvergenz s_n und s_m ganz bestimmte Werte; folglich dürfen wir auch die beiden unendlichen Reihen multiplizieren und erhalten hiebei nach Frage 182:

$$\begin{aligned} s_m \cdot s_n = 1 &+ \left\{\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\right\}x + \left\{\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\}x^2 \\ &+ \left\{\binom{m}{3} + \binom{m}{2}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right\}x^3 + \cdots \\ &+ \left\{\binom{m}{r} + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r-2}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{r}\right\}x^r + \cdots \end{aligned}$$

$$= 1 + \binom{m+n}{1}x + \binom{m+n}{2}x^2 + \binom{m+n}{3} + \cdots + \binom{m+n}{r}x_r + \cdots = s_{m+n}$$

Somit besteht die Beziehung, daß für jeden Wert von m und n

$$s_m \cdot s_n = s_{m+n} \text{ ist.}$$

Wählen wir nun $m = n$, so folgt:

$$s_n \cdot s_n = s_{2n}$$

$$s_n \cdot s_n \cdot s_n = s_{2n} \cdot s_n = s_{3n}$$

$$s_n \cdot s_n \cdot s_n \cdot s_n = s_{3n} \cdot s_n = s_{4n}$$

und allgemein:

$$\left\{s_n\right\}^q = s_{qn}$$

wenn q eine ganze positive Zahl ist. Nehmen wir jetzt $n = \frac{p}{q}$, wo p und q positive ganze Zahlen sind, so folgt aus voriger Gleichung:

$$\left\{s_{\frac{p}{q}}\right\}^q = s_p$$

Da aber p eine positive ganze Zahl ist, so hat man nach dem binomischen Lehrsatz:

$$s_p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{p}x^p = (1+x)^p;$$

mithin folgt aus der Gleichung

$$\left\{s_{\frac{p}{q}}\right\}^q = (1+x)^p \text{ jetzt:}$$

$$s_{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+x)^p} = (1+x)^{\frac{p}{q}},$$

also muß sein:

$$s_{\frac{p}{q}} = 1 + \binom{\frac{p}{q}}{1}x + \binom{\frac{p}{q}}{2}x^2 + \binom{\frac{p}{q}}{3}x^3 + \cdots = (1+x)^{\frac{p}{q}};$$

wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt und der Bruch $\frac{p}{q}$ positiv ist.

Wählen wir jetzt $m = -n$, so folgt aus der obigen Beziehung:

$$s_n \cdot s_{-n} = s_0 = 1.$$

Somit ist:

$$s_{-n} = \frac{1}{s_n}.$$

Nehmen wir an, daß n eine positive ganze oder positive gebrochene Zahl sei, so ist nach dem vorigen:

$$s_n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots = (1+x)^n;$$

also haben wir:

$$\frac{1}{s_n} = \frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n}$$

und die vorige Gleichung $s_{-n} = \frac{1}{s_n}$ geht jetzt über in $s_{-n} = (1+x)^{-n}$; d. h. es ist:

$$s_{-n} = 1 + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \binom{-n}{3}x^3 + \cdots = (1+x)^{-n}$$

Hiemit ist bewiesen, daß stets

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots = (1+x)^n$$

ist, **wenn die Zahl n beliebig positiv oder negativ, ganz oder gebrochen ist.**

Nun bleibt noch die Frage zu beantworten übrig, welche Summe die Binominalreihe liefert, wenn wir die Zahl n irrational annehmen. Als Beispiel wählen wir $n = \pi = 3{,}14159\ldots$ und suchen den Wert von

$$s_\pi = 1 + \binom{\pi}{1}x + \binom{\pi}{2}x^2 + \binom{\pi}{3}x^3 + \cdots$$

Offenbar ist nach obigem:

$$s_{3,14} = 1 + \binom{3{,}14}{1}x + \binom{3{,}14}{2}x^2 + \cdots = (1+x)^{3,13}$$

$$s_{3,141} = 1 + \binom{3{,}141}{1}x + \binom{3{,}141}{2}x^2 + \cdots = (1+x)^{3,141}$$

$$s_{3,1315} = 1 + \binom{3{,}1414}{1}x + \binom{3{,}1415}{2}x^2 + \cdots = (1+x)^{3,1415} \quad \text{usw.}$$

Je mehr wir Dezimalstellen nehmen, desto näher kommen wir an π heran, und da für eine beliebige Anzahl von Dezimalstellen

$$s_{3,14159\ldots} = (1+x)^{3,14159\ldots}$$

ist, so wird auch für eine unendliche Anzahl von Dezimalen:

$$s_\pi = (1+x)^\pi$$

werden; mit anderen Worten, unsere Summenformel gilt auch für $n = \pi$. Mit der gleichen Schlußweise finden wir ihre Giltigkeit für jede irrationale Zahl n.

Wir haben hiemit den **Satz: Innerhalb des Konvergenzgebietes gilt für jeden beliebigen reellen Wert von n die Formel:**

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots = (1+x)^n \quad \ldots \text{№ } 48$$

Im allgemeinen muß x zwischen -1 und $+1$ liegen. Für $x = +1$ bleibt die Gleichung nur richtig unter der Bedingung $-1 < n < +\infty$ und für $x = -1$ nur unter der Bedingung $0 < n < +\infty$.

Frage 201. Wie erhalten wir aus der Binominalreihe

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots$$

die frühere Form des binomischen Lehrsatzes?

Erkl. 145. Die allgemeine Giltigkeit des binomischen Lehrsatzes hat Newton entdeckt; er veröffentlichte dieselbe in einem Brief an Leibniz vom 13. Juni 1676.

Siehe auch Eulers Werk Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748.

Cauchy, Analyse algebrique, Paris 1821.

Abel, Crelles Journal, Bd. I, 1827.

Antwort. Nehmen wir $x=\frac{b}{a}$, so folgt aus:

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^3+\cdots=(1+x)^n$$

$$1+\binom{n}{1}\cdot\frac{b}{a}+\binom{n}{2}\frac{b^2}{a^2}+\cdots=\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

Multiplizieren wir nun beiderseits mit a^n durch, so erhalten wir:

$$a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2 +\cdots=(a+b)^n \ldots \text{№ } 49$$

Diese Formel gilt nach Obigem für jede Zahl n, wenn $a^2>b^2$ ist.

Frage 202. Welche Folgerung gestatten die vorausgehenden Untersuchungen?

Antwort. Schreiben wir die vorige Gleichung umgekehrt, so lautet sie:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots$$

Wir schließen daraus: Die Formel für den binomischen Lehrsatz gilt für jeden reellen Exponenten n, wenn $a^2>b^2$ ist. Obige Gleichung ist also der Ausdruck des **allgemeinen binomischen Lehrsatzes.**

---

5. Anwendungen des allgemeinen binomischen Lehrsatzes.

Aufgabe 372. Entwickle nach dem binomischen Lehrsatz $(a+b)^{-1}$.

Auflösung. Für $n=-1$ erhalten wir:

$$(a+b)^{-1}=a^{-1}+\binom{-1}{1}a^{-2}b+\binom{-1}{2}a^{-3}b^2+\binom{-1}{3}a^{-4}b^3+\cdots$$

$$=a^{-1}-a^{-2}b+a^{-3}b^2-a^{-4}b^3+\cdots,$$

denn $\binom{-1}{1}=\frac{-1}{1}=-1$; $\binom{-1}{2}=\frac{(-1)(-2)}{1\cdot 2}=+1$ usw.

Aufgabe 373. Ebenso $(a+b)^{-3}$.

Auflösung. Hier folgt für $n=-3$:

$$(a+b)^{-3} = a^{-3} + \frac{-3}{1}a^{-4}b + \frac{-3}{1}\cdot\frac{-4}{2}a^{-5}b^2 + \frac{-3}{1}\cdot\frac{-4}{2}\cdot\frac{-5}{3}a^{-6}b^3 + \cdots$$

$$= a^{-3} - 3a^{-4}b + 6a^{-5}b^2 - 10a^{-6}b^3 - \cdots$$

Aufgabe 374. Ebenso $(a+b)^{-m}$.

Auflösung. Für $n=-m$ folgt:

$$(a+b)^{-m} = a^{-m} + \frac{-m}{1}\cdot a^{-m-1}b + \frac{-m}{1}\cdot\frac{-m-1}{2}a^{-m-2}b^2$$

$$+ \frac{-m}{1}\cdot\frac{-m-1}{2}\cdot\frac{-m-2}{3}a^{-m-3}b^3 + \cdots$$

$$= a^{-m} - \frac{m}{1}\cdot a^{-(m+1)}b + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot a^{-(m+2)}b^2$$

$$- \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot a^{-(m+3)}b^3 + \cdots,$$

wenn $a^2 > b^2$ ist.

Aufgabe 375. Ebenso $(a-b)^{-2}$.

Auflösung. Nehmen wir $n=-2$ und $\beta=-b$, so folgt:

$$(a+\beta)^{-2} = a^{-2} + \frac{-2}{1}a^{-3}\beta + \frac{(-2)(-3)}{1\cdot 2}a^{-4}\beta^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-5}\beta^3$$

$$+ \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{-6}\beta^4 + \cdots$$

Hieraus ergibt sich jetzt:

$$(a-b)^{-2} = a^{-2} + 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 + 4a^{-5}b^3 + 5a^{-6}b^4 + \cdots$$

Aufgabe 376. Ebenso $(a-b)^{-m}$.

Auflösung. Nach Aufgabe 374 ist:

$$(a+\beta)^{-m} = a^{-m} - \frac{m}{1}a^{-(m+1)}\beta + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}a^{-(m+2)}\beta^2$$

$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-(m+3)}\beta^3 + \cdots$$

Col. Math 26.

Heft 1338	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Heft 13

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz vollständig in etwa 28 Heften à 25 Pfg.

Für $\beta = - b$ folgt jetzt:

$$(a-b)^{-m} = a^{-m} + \frac{m}{1} a^{-(m+1)} b + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} a^{-(m+2)} b^2$$
$$+ \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{-(m+3)} b^3 + \cdots,$$

wenn $a^2 > b^2$ ist.

Aufgabe 377. Berechne nach dem binomischen Lehrsatz $\sqrt{1+x}$.

Auflösung. Es ist

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}.$$

Für $n = \frac{1}{2}$ liefert der binomische Lehrsatz:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1/2}{1} x + \frac{1/2}{1} \cdot \frac{1/2 - 1}{2} \cdot x^2 + \frac{1/2}{1} \cdot \frac{1/2 - 1}{2} \cdot \frac{1/2 - 2}{3} x^3 + \cdots$$

oder

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} x^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} x^4 - \cdots \ldots \text{№ } 50.$$

Aufgabe 378. Ebenso $\sqrt{1-x}$.

Auflösung. Aus der vorigen Entwicklung von $(1+x)^{1/2}$ erhalten wir diejenige für $(1-x)^{1/2}$, wenn wir die Vorzeichen der Glieder, welche x mit ungeraden Exponenten enthalten in die entgegengesetzten verwandeln. Dies gibt:

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{+1/2} = 1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} x^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} x^4 - \cdots \text{№ } 51$$

Aufgabe 379. Ebenso

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Auflösung. Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2};$$

nun wird

$$(1+x)^{-1/2} = 1 + \frac{-1/2}{1} x + \frac{(-1/2)(-1/2 - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(-1/2)(-1/2 - 1)(-1/2 - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} x^4 - \cdots \ldots \text{№ } 52.$$

Aufgabe 380. Ebenso $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Auflösung. Es wird offenbar:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^3$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^4+\cdots\ldots\ldots \quad \text{№ 53}$$

Aufgabe 381. Ebenso $\sqrt[3]{1+x}$. (Siehe Aufgabe 341).

Auflösung. Für $n=\frac{1}{3}$ erhalten wir:

$$\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}x^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{9}x^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{12}x^4+\cdots \quad \text{№ 54}$$

Aufgabe 382. Ebenso $\sqrt[3]{1-x}$.

Auflösung. Es wird:

$$\sqrt[3]{1-x}=(1-x)^{1/3}=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}x^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{9}x^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{12}x^4-\cdots \quad \text{№ 55}$$

Aufgabe 383. Ebenso $(1+x)^{\frac{1}{m}}$.

Auflösung. Für $n=\frac{1}{m}$ folgt:

$$\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}x+\frac{\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$

oder

$$=1+\frac{1}{m}x-\frac{m-1}{2m^2}x^2+\frac{(m-1)(2m-1)}{2\cdot 3\cdot m^3}x^3$$
$$-\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{2\cdot 3\cdot 4m^4}x^4+\cdots\ldots\ldots \quad \text{№ 56}$$

Aufgabe 384. Berechne $\sqrt{1,1}$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

Auflösung. Wir setzen $1,1=1+0,1$; dann wird nach Aufgabe 377

$$\sqrt{1,1}=\sqrt{1+0,1}=(1+0,1)^{\frac{1}{2}}$$
$$=1+\frac{1}{2}\cdot 0,1-\frac{1}{8}\cdot 0,1^2+\frac{1}{16}\cdot 0,1^3-\frac{5}{128}\cdot 0,1^4-\cdots$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
+\frac{1}{2}\cdot 0{,}1 &= 0{,}05 \\
\hline
&= 1{,}05 \\
-\frac{1}{8}\cdot 0{,}1^2 &= -0{,}00125 \\
\hline
&= 1{,}04875 \\
+\frac{1}{16}\cdot 0{,}1^3 &= 0{,}0000625 \\
\hline
&= 1{,}0488125 \\
-\frac{5}{128}\cdot 0{,}1^4 &= -0{,}0000039 \\
\hline
&= 1{,}0488086
\end{aligned}
$$

u. s. f.

Also ist $\sqrt{1{,}1} = 1{,}0488086$.

Aufgabe 385. Ebenso $\sqrt{0{,}9}$.

Auflösung. Für $0{,}9 = 1 - 0{,}1$ folgt aus Aufgabe 378

$$\sqrt{0{,}9} = \sqrt{1 - 0{,}1} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}1 - \frac{1}{8}\cdot 0{,}1^2 - \frac{1}{16}\cdot 0{,}1^3 - \frac{5}{128}\cdot 0{,}1^4 - \cdots$$

Nun ist:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
-\frac{1}{2}\cdot 0{,}1 &= -0{,}05 \\
\hline
& \quad 0{,}95 \\
-\frac{1}{8}\cdot 0{,}1^2 &= -0{,}00125 \\
\hline
& \quad 0{,}94875 \\
-\frac{1}{16}\cdot 0{,}1^3 &= -0{,}0000625 \\
\hline
& \quad 0{,}9486875
\end{aligned}
$$

u. s. w.

also ist $\sqrt{0{,}9} = 0{,}948688$.

Aufgabe 386. Ebenso $\sqrt[3]{1{,}02}$.

Auflösung. Wir nehmen

$$1{,}02 = 1 + 0{,}02$$

und wenden die Formel der Aufgabe 381 an; diese liefert

$$\sqrt[3]{1{,}02} = \sqrt[3]{1 + 0{,}02}$$
$$= 1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}02 - \frac{1}{9}\cdot 0{,}02^2 + \frac{5}{81}\cdot 0{,}02^3 - \frac{10}{243}\cdot 0{,}02^4 + \cdots$$

oder ausgerechnet:

$$\begin{array}{rr} 1 = & 1 \\ +\frac{1}{3}\cdot 0{,}02 = & 0{,}0066667 \\ \hline & 1{,}0066663 \\ -\frac{1}{9}\cdot 0{,}02^2 = & -\,0{,}0000444 \\ \hline & 1{,}00\ .6223 \\ +\frac{5}{81}\cdot 0{,}02^3 = & +\,0{,}0000005 \\ \hline & 1{,}0066218 \end{array} \quad \text{usw.}$$

Somit ist $\sqrt[3]{1{,}02} = 1{,}006622$.

Aufgabe 387. $\sqrt[3]{0{,}97}$.

Auflösung. Für $0{,}97 = 1 - 0{,}03$ gibt die Formel der Aufgabe 382:

$$\sqrt[3]{0{,}97} = \sqrt[3]{1 - 0{,}03} = (1 - 0{,}03)^{1/3} = 1 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}03 - \frac{1}{9}\cdot 0{,}03^2 - \frac{5}{81}\cdot 0{,}03^3$$
$$- \frac{10}{243}\cdot 0{,}03^4 - \cdots$$

Nun ist

$$\begin{array}{rr} 1 = & 1 \\ -\frac{1}{3}\cdot 0{,}03 = & -\,0{,}01 \\ \hline & 0{,}99 \\ -\frac{1}{9}\cdot 0{,}03^2 = & -\,0{,}0001 \\ \hline & 0{,}9899 \\ -\frac{5}{81}\cdot 0{,}03^3 = & -\,0{,}0000017 \\ \hline & 0{,}9898983 \end{array} \quad \text{usw.}$$

Somit ist $\sqrt[3]{0{,}97} = 0{,}989898$.

Aufgabe 388. Ebenso $\sqrt{10}$.

Auflösung. Es ist

$$\sqrt[2]{10} = \sqrt[2]{9+1} = \sqrt[2]{9(1+{}^1/_9)} = 3\sqrt[2]{1+{}^1/_9} = 3(1+{}^1/_9)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{81} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{729} - \cdots\right\}$$

$$= 3\left\{1 + \frac{1}{18} - \frac{1}{648} + \frac{1}{11664} - \cdots\right\}$$

$$= 3\cdot 1{,}054092 = 3{,}162277.$$

Aufgabe 389. Ebenso $\sqrt[3]{511}$.

Auflösung. Hier haben wir:

$$\sqrt[3]{511} = \sqrt[3]{512-1} = \sqrt[3]{512\left(1-\frac{1}{512}\right)}$$

$$= 8\sqrt[3]{1-\frac{1}{512}} = 8\left(1-\frac{1}{512}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 8\left\{1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{512} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{512^2} - \frac{5}{81}\cdot\frac{1}{512^3} - \cdots\right\}$$

$$= 8\left\{1 - \frac{1}{1536} - \frac{1}{2359296} - \cdots\right\}$$

$$= 8\cdot 0{,}999349$$

$$= 7{,}99479.$$

Aufgabe 390. Ebenso $\sqrt{2}$.

Auflösung. Wir müssen hier den Radikanden 2 vor der Entwicklung umformen; wir nehmen

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{\frac{49+1}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{25}\left(1+\frac{1}{49}\right)} = \frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}} = \frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{49^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{49^3} - \frac{5}{128}\cdot\frac{1}{49^4} + \cdots\right\}$$

$$= \left\{1 + \frac{1}{98} - \frac{1}{19208} + \frac{1}{1882384} - \cdots\right\}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ \frac{1}{98} &= 0{,}0102041 \\ \hline &= 1{,}0102041 \\ -\frac{1}{19208} &= -0{,}0000521 \\ \hline &= 1{,}0101520 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Somit $\sqrt{2} = \frac{7}{5} \cdot 1{,}0101520 = 1{,}414213.$

Aufgabe 391. Ebenso $\sqrt{3}$.

Erkl. 146. Es ist

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ -\frac{1}{1352} &= -0{,}000739645 \\ -\frac{1}{3655808} &= -0{,}000000274 \\ \hline \text{Klammer} &= 0{,}999260081 \\ \frac{26}{15} \cdot \text{Klammer} &= 1{,}7320508 \end{aligned}$$

Auflösung. Es ist

$$3 \cdot 15^2 = 3 \cdot 225 = 675 = 676 - 1 = 26^2 - 1;$$

daher

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{26^2 - 1}{15^2}} = \frac{26}{15}\sqrt{1 - \frac{1}{676}}$$

$$= \frac{26}{15}\left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{676} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{676^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{676^3} - \cdots\right\}$$

$$= \frac{26}{15}\left\{1 - \frac{1}{1352} - \frac{1}{3655808} - \cdots\right\}$$

$$= 1{,}7320508.$$

Aufgabe 392. Ebenso $\sqrt[3]{3}$.

Erkl. 147. Es ist

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ -\frac{10}{6591} &= -0{,}0015172 \\ \hline & 0{,}9984828 \\ -\frac{100}{43441281} &= -0{,}0000023 \\ \hline \text{Klammer} &= 0{,}9984805 \\ \frac{13}{9} \cdot \text{Klammer} &= 1{,}4422496. \end{aligned}$$

Auflösung. Wir setzen hier:

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 9^3}{9^3}} = \sqrt[3]{\frac{2187}{9^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2197 - 10}{9^3}} = \sqrt[3]{\frac{13^3 - 10}{9^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{13^3}{9^3}\left\{1 - \frac{10}{13^3}\right\}} = \frac{13}{9}\sqrt[3]{1 - \frac{10}{2197}}$$

$$=\frac{13}{9}\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{2197}-\frac{1}{9}\cdot\frac{100}{2197^2}-\frac{5}{81}\cdot\frac{1000}{2197^3}-\cdots\right\}$$

$$=\frac{13}{9}\left\{1-\frac{10}{6591}-\frac{100}{43441281}-\cdots\right\}$$

$$=1{,}4422496.$$

Aufgabe 393. Ebenso $\sqrt[4]{255}$.

Auflösung. Da

$$255=256-1=4^4-1$$

ist, so folgt:

$$\sqrt[4]{255}=\sqrt[4]{4^4-1}=\sqrt[4]{4^4\left(1-\frac{1}{4^4}\right)}=4\sqrt[4]{1-\frac{1}{256}}=4\left(1-\frac{1}{256}\right)^{1/4}$$

$$=4\left\{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{256}-\frac{3}{32}\cdot\frac{1}{256^2}-\frac{7}{128}\cdot\frac{1}{256^3}-\cdots\right\}$$

$$=4\left\{1-\frac{1}{1024}-\frac{3}{2097152}-\cdots\right\}$$

$$=3{,}996088.$$

Erkl. 148. Es ist

$$\begin{array}{rl} 1 = & 1 \\ -\frac{1}{1024} = & -0{,}000976562 \\ \hline & 0{,}999023438 \\ -\frac{3}{2097152} = & -0{,}000001431 \\ \hline \text{Klammer} = & 0{,}999022007 \\ 4\,.\,\text{Klammer} = & 3{,}99608828. \end{array}$$

Aufgabe 394. Ebenso $\sqrt[5]{33}$.

Auflösung. Hier nehmen wir:

$$\sqrt[5]{33}=\sqrt[5]{32+1}=\sqrt[5]{32\left(1+\frac{1}{32}\right)}=2\left(1+\frac{1}{32}\right)^{1/5}$$

$$=2\left\{1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}+\frac{1/5}{1}\cdot\frac{1/5-1}{2}\cdot\frac{1}{32^2}+\frac{1/5}{1}\cdot\frac{1/5-1}{2}\cdot\frac{1/5-2}{3}\cdot\frac{1}{32^3}+\cdots\right\}$$

$$=2\left\{1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{32^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{1}{32^2}-\cdots\right\}$$

$$=2\left\{1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}-\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{32^2}+\frac{6}{125}\cdot\frac{1}{32^3}-\cdots\right\}$$

$$=2\left\{1+\frac{1}{160}-\frac{1}{12800}+\frac{3}{2048000}-\cdots\right\}$$

$$=2{,}0123468.$$

Erkl. 149. Hier ist

$$\begin{array}{rl} 1 = & 1 \\ +\frac{1}{160} = & 0{,}0062500 \\ \hline & 1{,}0062500 \\ -\frac{1}{12800} = & -0{,}0000781 \\ \hline & 1{,}0061719 \\ +\frac{3}{2048000} = & -0{,}0000015 \\ \hline \text{Klammer} = & 1{,}0061734 \\ 2\,.\,\text{Klammer} = & 2{,}0123468. \end{array}$$

Aufgabe 395. Ein Kapital von 1 Mark steht zu 5% auf Zinseszinsen. Wie groß ist dasselbe nach 6 Jahren?

Erkl. 150. Nach dem Gesetz der Zinseszinsrechnung wächst ein Kapital von 1 Mark in n Jahren bei p Prvzent an auf

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \text{ Mark.}$$

Siehe Kleyer, Zinseszinsrechnung.

Antwort. Das Kapital wächst an zu

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)^6 \text{Mark} = (1+0{,}05)^6 \text{ Mark}$$

$$= 1 + \binom{6}{1}0{,}05 + \binom{6}{2}0{,}05^2 + \binom{6}{3}0{,}05^3 + \cdots$$

$$= 1 + 6\cdot 0{,}05 + 15\cdot 0{,}05^2 + 20\cdot 0{,}05^3 - \cdots$$

$$= 1{,}3401 \text{ Mark.}$$

6. Ungelöste Aufgaben über den binomischen Lehrsatz.

Aufgabe 396. Berechne folgende 10 Binominalkoeffizienten:

$$\binom{4/3}{5},\ \binom{-2/7}{3},\ \binom{-3/2}{4},\ \binom{1\,1/5}{3},$$

$$\binom{-2\,1/2}{5},\ \binom{1{,}5}{4},\ \binom{-0{,}2}{3},$$

$$\binom{-1{,}1}{5},\ \binom{\sqrt{3}}{4} \text{ und } \binom{\sqrt[3]{2}}{3}$$

Aufgabe 397. Entwickle nach dem binomischen Lehrsatz:

$$(a+b)^{-2} \text{ und } (a-b)^{-3}.$$

Aufgabe 398. Ebenso

$$(x^2+y^2)^{1/2},\ (m+n)^{1/2}.$$

Aufgabe 399. Ebenso

$$(a^3+1)^{1/3},\ (m^3+n^3)^{1/3},\ \sqrt[3]{1+a-a^2}$$

Aufgabe 400. Ebenso

$$(1-x)^{1/4},\ \sqrt[4]{3+x^2},\ \sqrt[4]{1+2a+3a^2}.$$

Aufgabe 401. Ebenso

$$(1+x^2)^{1/5} \text{ und } (p^5+q^5)^{1/5}.$$

Aufgabe 402. Ebenso

$$(1+x)^{4/3},\ (a-b)^{3/4} \text{ und } (a+b)^{2/3}.$$

Aufgabe 403. Ebenso

$$(a+b)^{-1/2},\ (m-n)^{-2/3},\ (1-x)^{-1/4} \text{ und } (1+x)^{-1/5}.$$

Aufgabe 404. Ebenso

$$\frac{1}{\sqrt[5]{(1+x)^3}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt[8]{(a-b)^9}}$$

Aufgabe 405. Ebenso

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right\}$$

Aufgabe 406. Berechne nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\sqrt{1,01},\ \sqrt{1,001},\ \sqrt{0,99},\ \sqrt{0,999}.$$

Aufgabe 407. Ebenso

$$\sqrt[3]{1,003},\ \sqrt[3]{1,0004},\ \sqrt[3]{0,98},\ \sqrt[3]{0,9997}.$$

Aufgabe 408. Ebenso

$$\sqrt[4]{0,9} \text{ und } \sqrt[4]{1,2}.$$

Aufgabe 409. Ebenso

$$\sqrt[5]{0,98} \text{ und } \sqrt[5]{1,03}.$$

Aufgabe 410. Ebenso

$$\sqrt{26},\ \sqrt{66},\ \sqrt{102},\ \sqrt{8},\ \sqrt{99} \text{ und } \sqrt{960}$$

Aufgabe 411. Ebenso

$$\sqrt[3]{126},\ \sqrt[3]{730},\ \sqrt[3]{341} \text{ und } \sqrt[3]{5829}.$$

Aufgabe 412. Ebenso

$$\sqrt[4]{626} \text{ und } \sqrt[4]{1295}.$$

Aufgabe 413. Ebenso

$$\sqrt[5]{31},\ \sqrt[6]{63} \text{ und } \sqrt[7]{131}.$$

Aufgabe 414. Ebenso

$$\sqrt[2]{1,5},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{3} \text{ und } \sqrt[5]{4}.$$

Aufgabe 415. Bestimme den Wert von $\dfrac{1-\sqrt[n]{1-x}}{x}$ für $x=0$ durch Reihenentwicklung.

VIII. Die Exponentialreihen.

I. Erläuternde Fragen mit Antworten über Exponentialfunktionen und Exponentialreihen. — Entwicklung derselben.

Frage 203. Was ist unter einer Exponentialfunktion zu verstehen?

Antwort. Unter einer Exponentialfunktion verstehen wir eine Größe von der Form b^x, in welcher die Basis b eine konstante Zahl vorstellt, welche größer als die Einheit sein soll, während der Exponent x eine unabhängige Größe ist. Beispiele von Exponentialgrößen sind 2^x, 10^x, n^x usw.

Frage 204. Wie läßt sich die Exponentialfunktion b^x in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln?

Antwort. Wir wollen annehmen, es sei möglich, b^x in eine Potenzreihe zu entwickeln, und setzen:

$$b^x = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Für $x = 0$ folgt $b^0 = a_0$; da aber b^0 jedenfalls $= 1$ ist, so muß auch $a_0 = 1$ sein, und wir haben einfacher:

$$1)\quad b^x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Jetzt müssen die Werte der Koeffizienten a_1, a_2, a_3 usw. ermittelt werden. Wir benützen hiezu den Satz aus der Potenzlehre, daß $b^x \cdot b^x = b^{2x}$ oder umgekehrt, daß

$$2)\quad b^{2x} = (b^x)^2$$

ist.

Aus unserer Annahme

$$b^x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

folgt, wenn wir x durch $2x$ ersetzen:

$$b^{2x} = 1 + a_1(2x) + a_2(2x)^2 + a_3(2x)^3 + \cdots$$

oder

$$3)\quad b^{2x} = 1 + 2a_1 x + 4a_2 x^2 + 8a_3 x^3 + 16a_4 x^4 + \cdots$$

Ferner folgt aus obiger Annahme nach Aufgabe 326, daß

$$4)\quad (b^x)^2 = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots)^2 = 1 + 2a_1 x + (2a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_3 + 2a_1 a_2)x^3 + (2a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2)x^4 + \cdots$$

Da nach No. 2 die rechten Seiten von No. 3 und No. 4 übereinstimmen müssen, so erhalten wir jetzt:

$$1 + 2a_1 x + 4a_2 x^2 + 8a_3 x^3 + 16a_4 x^4 + \cdots = 1 + 2a_1 x + (2a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_3 + 2a_1 a_2)x^3 + (2a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2)x^4 + \cdots$$

Nach dem Satz des Cartesius müssen nun die Koeffizienten der gleich hohen Potenzen von x auf beiden Seiten übereinstimmen; dies liefert die Gleichungen:

$$4a_2 = 2a_2 + a_1^2$$
$$8a_3 = 2a_3 + 2a_1 a_2$$
$$16a_4 = 2a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2$$

usw.

Daraus erhalten wir jetzt:

$$a_2 = \frac{a_1^2}{1 \cdot 2}; \quad a_3 = \frac{a_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$
$$a_4 = \frac{a_1^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ usw.}$$

Wir können demnach alle Koeffizienten a_2, a_3, a_4 ... in a_1 ausdrücken; a_1 selbst ist unbestimmt, was uns nicht wundern darf, weil wir über den Wert der Basis b noch keine Bestimmung getroffen haben.

Erkl. 151. Die Konvergenz der Reihe

$$1 + \frac{cx}{1} + \frac{(cx)^2}{2!} + \cdots$$

ist in der Aufgabe 316 nachgewiesen worden.

Schreiben wir jetzt c statt a_1, so folgt:

$$5)\quad b^x = 1 + \frac{cx}{1} + \frac{(cx)^2}{2!} + \frac{(cx)^3}{3!} + \frac{(cx)^4}{4!} + \cdots.$$

Eskl. 152. Die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

ist schon in der Aufgabe 315 nachgewiesen worden,

Erkl. 153. Es ist

$$1=1$$
$$\frac{1}{1}=1$$
$$\frac{1}{2}=0{,}5$$
$$\frac{1}{3!}=0{,}1666666\ldots$$
$$\frac{1}{4!}=0{,}0416666\ldots$$
$$\frac{1}{5!}=0{,}0083333\ldots$$
$$\frac{1}{6!}=0{,}0013888\ldots$$
$$\frac{1}{7!}=0{,}0001984\ldots$$
$$\frac{1}{8!}=0{,}0000248\ldots$$
$$\frac{1}{9!}=0{,}0000027\ldots$$
$$\frac{1}{10!}=0{,}0000002\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Daraus folgt:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{10!}=2{,}718281.$$

Hier hängt der Koeffizient c von der Basis b ab, und er ändert sich mit der letzteren; seine Beziehung zu b läßt sich einfach feststellen. Da nämlich die Reihe No. 5 für jeden Wert von x gelten muß, so setzen wir $x=0$ und finden:

$$6)\quad b=1+\frac{c}{1}+\frac{c^2}{2!}+\frac{c^3}{3!}+\frac{c^4}{4!}+\cdots$$

Diese Beziehung ist aber ganz ungeeignet, um aus einem gegebenen Wert von b den zugehörigen von c zu berechnen. Wir drehen jetzt die Sache um und weisen darauf hin, daß jedem Wert von c ein ganz bestimmter Basiswert b entsprechen muß, weil die Reihe No. 6 konvergiert; es muß demnach auch eine Basis geben für den Wert $c=1$; bezeichnen wir diese Basis mit e, so folgt:

$$7)\quad e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots \quad \text{№ 57}$$

Die numerische Berechnung ergibt auf 12 Dezimalen:

$$8)\quad e=2{,}718\;281\;828\;459\ldots \quad \text{№ 58}$$

Geben wir nun in der Reihe No. 5 der Basis b den speziellen Wert e und setzen den zugehörigen Wert c gleich 1, so erhalten wir:

$$9)\quad e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \quad \text{№ 59}$$

Diese Reihe heißt die natürliche Exponentialreihe; nach Aufgabe 316 konvergiert dieselbe für jeden beliebigen Wert von x, d. h. für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Wählen wir die Zahl e zur Basis eines Logarithmensystems, des sogenannten natürlichen Logarithmensystems, und bezeichnen den natürlichen Logarithmus einer Zahl z mit lz, so muß die Basis e mit

der Zahl lz potenziert, die Zahl z liefern; d. h. es muß sein:

$$10)\quad z = e^{lz}.$$

Ist lb der natürliche Logarithmus der Zahl b, so muß nach der vorigen Definitionsgleichung:

$$11)\quad b = e^{lb}$$

sein und somit auch:

$$12)\quad b^x = (e^{lb})^x = e^{xlb}.$$

Nach No. 9 ist für jede Zahl x_1 die Reihe giltig:

$$e^{x_1} = 1 + \frac{x_1}{1!} + \frac{x_1^{\,2}}{2!} + \frac{x_1^{\,3}}{3!} + \frac{x_1^{\,4}}{4!} + \cdots;$$

nehmen wir hier $x_1 = xlb$, so geht sie über in:

$$e^{xlb} = 1 + \frac{xlb}{1!} + \frac{(xlb)^2}{2!} + \frac{(xlb)^3}{3!} + \cdots$$

Unter Berücksichtigung von No. 12 folgt jetzt:

$$13)\quad b^x = 1 + \frac{xlb}{1!} + \frac{(xlb)^2}{2!} + \frac{(xlb)^3}{3!} + \frac{(xlb)^4}{4!} + \cdots \quad \text{№ 60}$$

Setzen wir jetzt noch $x = 1$, so erhalten wir die wichtige Reihe:

$$14)\quad b = 1 + \frac{lb}{1!} + \frac{(lb)^2}{2!} + \frac{(lb)^3}{3!} + \frac{(lb)^4}{4!} + \cdots \quad \text{№ 61}$$

Vergleichen wir No. 14 mit No. 6, so ergibt sich $c = lb$; d. h. der in No. 6 noch unbestimmt gebliebene Koeffizient c ist der natürliche Logarithmus der Basis b der Potenz b^x, welche als Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung angenommen worden ist.

Erkl. 154. Mittelst der Reihe No. 14 können wir zu einem gegebenen natürlichen Logarithmus lb die zugehörige Zahl b berechnen; für $lb = 2$ z. B. erhalten wir:

$$b = 1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \cdots$$
$$= 7{,}38905;\ \text{d. h. es ist}$$
$$7{,}38905 = e^2.$$

Frage 205. Wie geschieht nun der Übergang von den natürlichen Logarithmen zu den gemeinen Logarithmen?

Antwort. Die gewöhnlichen oder gemeinen Logarithmen haben als Basis die Zahl 10; unter dem gemeinen Logarithmus der Zahl z ist also die zweite Zahl $\log z$ zu verstehen, mit welcher 10 potenziert werden muß, damit der

Erkl. 155. Kennt man

$$\log e = \log 2{,}71828 = 0{,}4342945,$$

so läßt sich mittelst der Reihe No. 19 zu jedem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl berechnen; für $\log b = 3$ würde folgen:

$$b = 1 + \frac{3}{0{,}43\ldots} + \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{0{,}43\ldots}\right)^2 + \cdots$$
$$= 1 + 6{,}91 + 23{,}86 + 54{,}93 + 94{,}87 + \ldots = 1000$$

Man sieht, daß die Reihe anfangs stark steigt, um später zu fallen. Das 10te Glied ist $= 68{,}17$; das 15te noch $= 2{,}98$. Zur praktischen Berechnung eignet sich diese Reihe No. 19 nicht.

Wert der Potenz $= z$ werde, oder es muß sein:

$$z = 10^{\log z}$$

also ist auch

$$15)\quad b = 10^{\log b}$$

$$e = 10^{\log e} \text{ und}$$

$$16)\quad b = e^{lb} = (10^{\log e})^{lb} = 10^{lb \cdot \log e}.$$

Aus No. 15 und No. 16 erhalten wir

$$17)\quad \log b = lb \cdot \log e, \text{ also}$$

$$18)\quad lb = \frac{\log b}{\log e}.$$

Setzen wir diesen Wert ein in die obigen Reihen 13 und 14, so folgt:

$$19)\quad b = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{\log b}{\log e}\right) + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\log b}{\log e}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\log b}{\log e}\right)^3 + \cdots$$

und

$$20)\quad b^x = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\left(\frac{x \log b}{\log e}\right) + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{x \log b}{\log e}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{x \log b}{\log e}\right)^3 + \cdots$$ №67

Nach den Aufgaben 315 und 316 konvergieren die Exponentialreihen No. 14, 13, 19 und 20 für jeden Wert von x zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Frage 206. Wie läßt sich der Wert von der Zahl e nach dem binomischen Lehrsatz finden?

Antwort. Wir berechnen nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{x^3}{n^3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{n^3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Erkl. 156. Es wird:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!}+\cdots$$

Z. B, gibt $n = 10$:

$$1{,}1^{10} = 2 + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{6}$$
$$+\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{24}+\cdots$$
$$= 2{,}5937.$$

Ferner erhalten wir für $n = 100$:

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 1{,}01^{100} = 2{,}7048;$$

für $n = 1000$:

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 1{,}001^{1000} = 2{,}71706;$$

für $n = 10000$:

$$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} = 1{,}0001^{10000} = 2{,}71828$$

Wir sehen, es nähert sich der Bruch

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

für ein ins Unendliche wachsendes n einer bestimmten Grenze; dieser Grenzwert e ist $= 2{,}718281\ldots$

Lassen wir jetzt n unendlich groß werden, was wir links durch das vorgesetzte Zeichen Limes andeuten, so folgt, weil rechts die Brüche $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, $1-\frac{3}{n}$ usw. alle den Grenzwert 1 erreichen:

$$21)\quad \underset{n=\infty}{\text{Limes}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Setzen wir jetzt noch $x = 1$, so folgt:

$$22)\quad \underset{n=\infty}{\text{Limes}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Vergleichen wir No. 22 mit No. 7, so erhalten wir den **Satz:** Die Zahl e ist der Grenzwert des Binoms $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ oder es ist:

$$23)\quad \underset{n=\infty}{\textbf{Limes}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \,..\, \text{№}\,63$$

Ferner gibt die Vergleichung von No. 21 mit No. 9 den **Satz:** Der Wert der Potenz e^x ist der Grenzwert des Binoms $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ oder es ist:

$$24)\quad \underset{n=\infty}{\textbf{Limes}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \,..\, \text{№}\,64.$$

Frage 207. Zu welcher Art von Zahlen gehört die Zahl e?

Antwort. Da

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

ist, so folgt:

$$e < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 2} + \cdots$$

oder

$$e < 2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots \text{ oder}$$

$$e < 3.$$

Erkl. 157. Es ist:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = \frac{1-(^1/_2)^x}{1-{}^1/_2} = 2.$$

Hienach ist e eine zwischen 2 und 3 liegende Zahl. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: entweder läßt sich der Wert w, um welchen e die Zahl 2 übersteigt, in der Form eines echten Bruches $\frac{p}{q}$ darstellen, in welchem p und q ganze Zahlen vorstellen und $p < q$ ist, oder diese Darstellung ist nicht möglich, und der genannte Wert kann nur in der Form eines unperiodischen unendlichen Dezimalbruches angegeben werden.

Wir wollen untersuchen, ob $w = \frac{8}{11}$ sein kann; es müßte werden:

$$\frac{8}{11} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots 10} + \frac{1}{1\cdot 2\ldots 11} + \frac{1}{1\cdot 2\ldots 12} + \cdots$$

Wir multiplizieren mit 11! durch und bekommen:

$$8\cdot 10! = (3\cdot 4\ldots 11) + (4\cdot 5\ldots 11) + \cdots 11 + 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12\cdot 13} + \frac{1}{12\cdot 13\cdot 14} + \cdots$$

Hier ist $8\cdot 10!$ eine ganze Zahl, welche wir mit z bezeichnen wollen; ebenso ist

$$(3\cdot 4\ldots 11) + (4\cdot 5\ldots 11) + \cdots + 11 + 1$$

auch eine ganze Zahl, welche z_1 heißen soll. Zu der letzteren addiert sich noch rechts der Ausdruck:

Erkl. 158. Dieser Beweis von der Irrationalität der Zahl e wurde gegeben von Stainville.

$$a = \frac{1}{12} + \frac{1}{12\cdot 13} + \frac{1}{12\cdot 13\cdot 14} + \cdots$$

Heft 1539	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

— Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas. —

Heft 10

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz i vollständig in 24 Heften à 25 Pfg.

Sein Wert ist jedenfalls kleiner als

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 12\cdot 12}+\cdots=\frac{1}{12}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{12}\right)^{\infty}}{1-\frac{1}{12}}=\frac{1}{12}\cdot\frac{12}{11}=\frac{1}{11}.$$

Da also $z=z_1+a$ und a kleiner als 1 ist, so würde die ganze Zahl z_1, vermehrt um einen echten Bruch a, die ganze Zahl z liefern; dies ist aber unmöglich. Somit ist unsere Annahme, daß

$$e=2+\frac{8}{11}$$

sei, zu verwerfen; bei einem andern Bruch für w z. B. $=\frac{718}{989}$ würde sich bei der nämlichen Beweisführung die Unmöglichkeit dieser neuen Annahme herausstellen. Wir schließen daraus, daß die Zahl e sich nicht in der Form $2+\frac{p}{q}$ darstellen läßt; somit ist die Zahl e irrational wie die bekannte Zahl $\pi=3{,}14159\ldots$

2. Gelöste Übungsbeispiele über Exponentialreihen.

Aufgabe 416. Wie heißt die Reihe für e^{-x}?

Erkl. 159. Der Leser versuche das Resultat auch zu gewinnen aus

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}$$

durch wirkliche Division.

Auflösung. Es ist für jeden endlichen Wert von x_1:

$$e^{x_1}=1+\frac{x_1}{1}+\frac{x_1^{\,2}}{2!}+\frac{x_1^{\,3}}{3!}+\frac{x_1^{\,4}}{4!}+\cdots$$

Nehmen wir jetzt $x_1=-x$ an, so folgt:

$$25)\quad e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

Aufgabe 417. Entwickle die Funktion $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ in eine Reihe.

Auflösung. Aus No. 9 und No. 25 gibt die Addition

$$\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Aufgabe 418. Ebenso x^x.

Auflösung. Nehmen wir in No. 13 $b = x$ an, so erhalten wir die Reihe:

$$x^x = 1 + \frac{xlx}{1!} + \frac{(xlx)^2}{2!} + \frac{(xlx)^3}{3!} + \cdots$$

Aufgabe 419. Berechne $e^{1/2}$ auf 5 Dezimalen.

Auflösung. Es wird:

$$e^{1/2} = 1 + \frac{1/2}{1} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^4}{4!} + \frac{(1/2)^5}{5!} + \cdots$$

$$\begin{aligned} &= 1 \\ &\ 0{,}5 \\ &\ 0{,}125 \\ &\ 0{,}02083 \\ &\ 0{,}00260 \\ &\ 0{,}00026 \\ &\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$e^{1/2} = 1{,}64869\ldots$$

Aufgabe 420. Berechne durch die Exponentialreihen die Zahl b, deren natürlicher Logarithmus 0,1 ist.

Auflösung. Nach No. 14 erhalten wir, da $lb = 0{,}1$ ist:

$$b = 1 + \frac{0{,}1}{1} + \frac{0{,}1^2}{2!} + \frac{0{,}1^3}{3!} + \frac{0{,}1^4}{4!} + \cdots$$

$$\begin{aligned} &= 1 \\ &\ 0{,}1 \\ &\ 0{,}005 \\ &\ 0{,}000167 \\ &\ 0{,}000004 \\ &\ \ldots\ldots \\ &= 1{,}105171. \end{aligned}$$

Aufgabe 421. Berechne ebenso die Zahl b, deren gemeiner Logarithmus $=0{,}1$ ist.

Erkl. 160. Da hier $\log b = \frac{1}{10}$, so hat man auch

$$b = 10^{1/10} = \sqrt[10]{10}$$

Eine zehnstellige Logarithmentafel liefert zu $\log b = 0{,}1$ die Zahl $b = 1{,}25893$.

Auflösung. Nehmen wir in No. 19 $\log b = \frac{1}{10}$ an, so wird:

$$\frac{\log b}{\log e} = \frac{1/10}{0{,}43429} = \frac{1}{4{,}3429} = 0{,}23026;$$

daraus leiten wir ab:

$$b = 1 + \frac{1}{1!}\cdot 0{,}23026 + \frac{1}{2!}\cdot 0{,}23026^2 + \frac{1}{3!}\cdot 0{,}23026^3 + \cdots$$

$$\begin{aligned} = 1 \\ 0{,}23026 \\ 0{,}02651 \\ 0{,}00203 \\ 0{,}00012 \\ 0{,}00005 \\ \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$b = 1{,}25897.$$

Aufgabe 422. Welchen Wert erhält der Ausdruck $\frac{e^x - 1}{x}$ für $x=0$?

Erkl. 161. Es wird

$$\frac{e^{1/10} - 1}{1/10} = 1{,}0517$$

$$\frac{e^{1/100} - 1}{1/100} = 1{,}005$$

$$\frac{e^{1/1000} - 1}{1/1000} = 1{,}0004 \text{ usw.}$$

Man sieht daraus, daß wenn der Nenner $= 0$ wird, der Bruch den Wert 1 erhält.

Auflösung. Für $x = 0$ wird $e^x = 1$ und $e^x - 1 = 0$; es erhält demnach der Bruch die Form $\frac{0}{0}$. Im allgemeinen ist der Wert des Bruches $\frac{0}{0}$ unbestimmt; im vorliegenden Fall trifft dies nicht zu; lassen wir in $\frac{e^x - 1}{x}$ den Wert der Veränderlichen x sich der Null nähern, so nähert sich der Wert des Bruches $\frac{e^x - 1}{x}$ einer bestimmten Grenze, die dann erst erreicht wird, wenn x wirklich zu Null geworden ist. — Zur Ermittelung dieses Grenzwertes entwickeln wir zuerst e^x in die bekannte Reihe No. 9 und erhalten:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\left\{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right\} - 1}{x} = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots$$

Für $x=0$ folgt jetzt:

$$\underset{x=0}{\text{Limes}} \frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \;..\; \text{№ } 65.$$

Aufgabe 423. Welchen Wert erhält der Bruch $\frac{5^x-1}{x}$ für $x=0$?

Auflösung. Wie im vorigen Beispiel erhält für $x=0$ der Bruch die Form $\frac{0}{0}$; wir entwickeln daher 5^x nach No. 13 in eine Reihe und bekommen:

$$\frac{5^x-1}{x} = \frac{\left\{1+\frac{xl5}{1!}+\frac{(xl5)^2}{2!}+\frac{(xl5)^3}{3!}+\cdots\right\}-1}{x}$$

$$= l5 + \frac{x(l5)^2}{2!} + \frac{x^2(l5)^3}{3!} + \cdots;$$

dies liefert für $x=0$:

$$\underset{x=0}{\text{Limes}} \frac{5^x-1}{x} = l5 \cdot = 1{,}60944.$$

Aufgabe 424. Ebenso bestimme den Grenzwert von $\frac{a^x-b^x}{x}$ für $x=0$.

Auflösung. Es ist:

$$\frac{a^x-b^x}{x} = \frac{\left\{1+\frac{xla}{1!}+\frac{(xla)^2}{2!}+\cdots\right\}-\left\{1+\frac{xlb}{1!}+\frac{(xlb^2)}{2!}+\cdots\right\}}{x}$$

$$= la - lb + \frac{x}{2!}\left\{(la)^2-(lb)^2\right\} + \frac{x^2}{3!}\left\{(la)^3-(lb)^3\right\} + \cdots$$

Daraus folgt:

$$\underset{x=0}{\text{Limes}} \frac{a^x-b^x}{x} = la - lb \;..\; \text{№ } 66$$

Aufgabe 425. Welchen Grenzwert erhält $(1+\xi)^{\frac{1}{\xi}}$ für $\xi=0$?

Auflösung. In Frage 206 ist gezeigt worden, daß

$$\underset{n=\infty}{\text{Limes}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \text{ ist.}$$

Setzen wir jetzt $\frac{1}{n} = \xi$, so wird $n = \frac{1}{\xi}$ und für $n = \infty$ wird

$$\xi = \frac{1}{\infty} = 0;$$

somit muß werden:

$$\operatorname*{Limes}_{\xi = 0} (1 + \xi)^{\frac{1}{\xi}} = e.$$

Aufgabe 426. Desgleichen für

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

wenn $n = \infty$ angenommen wird. (Siehe Frage 206).

Auflösung. In

$$\operatorname*{Limes}_{\nu = \infty} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = e$$

(siehe oben) nehmen wir $\frac{1}{\nu} = \frac{x}{n}$, also $\nu = \frac{n}{x}$; wenn wir nun den Wert von n unendlich groß werden lassen, so wird mit $\frac{n}{x}$ auch ν unendlich groß, daher muß sein:

$$\operatorname*{Limes}_{n = \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = e,$$

somit wird:

$$\operatorname*{Limes}_{n = \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Aufgabe 427. Wie groß wird ein Kapital von a Mark, welches zu p % ausgeliehen ist, in ν Jahren durch kontinuirlicher Verzinsung?

Auflösung. Wenn a Mark bei p % so ausgeliehen werden, daß der Zins in jedem $n^{\underline{\underline{ten}}}$ Teil des Jahres kapitalisiert wird, so wächst es in ν Jahren an auf die Snmme

$$z = a\left(1 + \frac{p}{n \cdot 100}\right)^{n\nu}$$

Die kontinuirliche Verzinsung tritt ein für $n = \infty$; wir haben also zu berechnen:

$$z = \underset{n=\infty}{\text{Limes}}\, a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\nu n}$$

$$= a \cdot \underset{n=\infty}{\text{Limes}} \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\nu n}$$

$$= a \cdot \underset{n=\infty}{\text{Limes}} \left(1 + \frac{\nu p}{100} \cdot \frac{1}{\nu n}\right)^{\nu n} = a \cdot e^{\frac{\nu p}{100}}$$

denn wenn $n = \infty$ wird, ist dies auch der Fall mit der Zahl νn; es kann demnach die Formel der vorigen Aufgabe angewendet werden mit $\frac{\nu p}{100}$ statt x.

---

3. Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 428. Beweise, daß die Reihe für b^x der Bedingung

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

genügt.

Aufgabe 429. Beweise die Irrationalität der Zahl e allgemein, indem $e = \frac{p}{q}$ angenommen wird.

Aufgabe 430. Wie heißen die Reihen für

$$e^{\frac{1}{x}},\quad a^{\frac{1}{x}},\quad x^{\frac{1}{x}}?$$

Aufgabe 431. Bestimme den Grenzwert von $\frac{e^x - 1}{x - 1}$ für $x = 1$.

Aufgabe 432. Ebenso von $\frac{a^x - a^y}{x - y}$ für $x = y$.

Aufgabe 433. Zu welcher Summe wachsen 100 Mark in 20 Jahren an bei 4%, wenn augenblickliche Verzinsung angenommen wird?

IX. Die logarithmischen Reihen.

1. Erläuternde Fragen mit Antworten über Logarithmen und logarithmische Reihen. — Entwicklung derselben.

Frage 208. Läßt sich der Logarithmus einer unabhängigen veränderlichen Größe x in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln?

Antwort. Bezeichnet lx den natürlichen Logarithmus der Zahl x, so muß $x = e^{lx}$ sein; für $x = 0$ folgt $0 = e^{-\infty}$, und für $x = 1$ folgt $1 = e^0$, d. h. es ist $l0 = -\infty$ und $l1 = 0$. Nehmen wir nun an, es lasse sich lx in eine konvergente nach x fortschreitende Potenzreihe entwickeln, so daß man hätte:

$$lx = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

so müßte $x = 0$ gesetzt, folgen:

$$l0 = a_0;\ \text{also}\ a_0 = -\infty$$

und für $x = 1$:

$$l1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots,\ \text{also}$$
$$0 = -\infty + a_1 + a_2 + \cdots$$

Man sieht leicht, daß keine konvergente Potenzreihe diese zwei Bedingungen erfüllen kann; es ist hienach unmöglich lx in eine Potenzreihe zu entwickeln. Was wir hier für lx gefunden haben, behält seine Giltigkeit auch für den gemeinen Logarithmus, überhaupt für den Logarithmus von jedem System, dessen Basis eine Zahl größer als 1 ist.

Aus diesem Grunde suchen wir jetzt eine Reihenentwicklung für den Logarithmus des Binoms $1 + x$.

Frage 209. Läßt sich der Logarithmus der Zahl $1+x$ in eine Potenzreihe entwickeln, wenn die Basis des Logarithmensystems beliebig gedacht ist?

Antwort. Nehmen wir an, es sei möglich $\log(1+x)$ in eine konvergente Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

zu entwickeln, welche für jeden Wert von x Giltigkeit hat, so folgt für $x=0$ $\log 1 = a_0$; somit muß jedenfalls, weil $\log 1 = 0$ ist, $a_0 = 0$ sein, also wegfallen, so daß wir haben:

$$\log(1+x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Nun fragt es sich, ob die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 usw. sich so bestimmen lassen, daß die Reihe rechts mit $\log(1+x)$ identisch wird. Nach den Gesetzen über die Logarithmen muß

$$\log(1+x)^2 = 2\log(1+x)$$

sein; ist also:

1) $\log(1+x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

so muß die Bedingung erfüllt werden:

2) $\log(1+x)^2 = 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + \cdots$

Andererseits hat man wegen

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + (2x + x^2)$$

indem man in No. 1 $2x + x^2$ an die Stelle von x setzt:

$$\log(1+x)^2 = a_1(2x+x^2) + a_2(2x+x^2)^2 + a_3(2x+x^2)^3 + \cdots$$

oder

3) $$\log(1+x)^2 = 2a_1 x + (a_1 + 4a_2)x^2 + (4a_2 + 8a_3)x^3 + (a_2 + 12a_3 + 16a_4)x^4 + \cdots$$

Wenden wir jetzt auf No. 2 und 3 das Gesetz der Koeffizientenvergleichung an, so erhalten wir:

$$a_1 + 4a_2 = 2a_2$$
$$4a_2 + 8a_3 = 2a_3$$
$$a_2 + 12a_3 + 16a_4 = 2a_4$$

usw.

Erkl. 162. Es ist:

$$(2x+x^2)^2 = 4x^2 + 4x^3 + x^4$$
$$(2x+x^2)^3 = 8x^3 + 12x^4 + 6x^5 + x^6$$
$$(2x+x^2)^4 = 16x^4 + 32x^5 + 24x^6 + 8x^7 + x^8$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Daher:

$$a_1(2x+x^2)+a_2(2x+x^2)^2+a_3(2x+x^2)^3+\ldots$$
$$=a_1(2x+x^2)+a_2(4x^2+4x^3+x^4)+a_3(8x^3+12x^4+6x^5+x^6)$$
$$+a_4(16x^4+\ldots)+\ldots$$
$$=2a_1x+(a_1+4a_2)x^2+(4a_2+8a_3)x^3$$
$$+(a_2+12a_3+16a_4)x^4+\ldots$$

Dies liefert:

$$a_2=-\frac{1}{2}a_1$$

$$a_3=-\frac{4a_2}{6}=+\frac{1}{3}a_1$$

$$a_4=-\frac{1}{14}(a_2+12a_3)=-\frac{1}{4}a_1$$

usw.

Hiemit geht No. 1 über in:

$$log(1+x)=a_1x-\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_1x^3}{3}-\frac{a_1x^4}{4}+\cdots$$

oder in

$$4) \quad log(1+x)=a_1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots\right)$$

Wir sehen, daß hier der erste Koeffizient a_1 unbestimmt geblieben ist. Dies hat seinen Grund darin, daß wir bei unserer Entwicklung kein bestimmtes Logarithmensystem gewählt haben; was wir bis jetzt gefunden haben, gilt ganz allgemein für alle Logarithmensysteme; es muß deshalb in der Reihe rechts notwendig eine Größe a_1 auftreten, welche erst dadurch bestimmt wird, daß man zu einem ganz bestimmten Logarithmensystem, z. B. zu dem natürlichen oder dem dekadischen übergeht.

Schreiben wir nun in No. 4 M statt a_1, so lautet unser Ergebnis:

$$5) \quad log(1+x)=M\left\{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\right\} \ldots\ldots \text{№ } 67$$

Der Faktor M hängt, wie wir eben ausgeführt haben, von der Wahl der Basis ab, und heißt der M o d u l u s d e s L o g a r i t h m e n s y s t e m s.

Die Reihe No. 5 wird l o g a r i t h m i s c h e R e i h e genannt.

Frage 210. Wenn wir jetzt ein bestimmtes Logarithmensystem, dessen Basis die Zahl b ist, zu Grunde legen, in diesem Logarithmensystem den Logarithmus der Größe $1+x$ mit $log_b(1+x)$, und den zugehörigen Modulus mit M_b bezeichnen, wie läßt sich dann die Größe von M_b bestimmen?

Antwort. Aus No. 5 folgern wir:

$$log_b\,(1+x)$$
$$=M_b\left\{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\right\}$$

Dividieren wir beiderseits mit x durch, so erhalten wir:

$$\frac{log_b\,(1+x)}{x}$$
$$=M_b\left\{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\cdots\right\}$$

Für $x=0$ folgt jetzt:

$$M_b=\left(\frac{log_b\,(1+x)}{x}\right)_{x=0.}$$

Der Bruch rechts erscheint aber, da $log\,1=0$ ist, für $x=0$ unter der Form $\frac{0}{0}$, also ist sein Wert zunächst unbestimmt; doch läßt sich dieser Wert finden; wir schreiben:

$$\frac{log_b\,(1+x)}{x}=log_b\,(1+x)^{\frac{1}{x}};$$

setzen wir ferner $x=\frac{1}{n}$ u. $\frac{1}{x}=n$, so wird für $x=0$ die Zahl $n=\infty$; daher muß sein:

$$\underset{x=0}{\text{Limes}}\frac{log_b\,(1+x)}{x}=\underset{n=\infty}{\text{Limes}}\;log_b\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Da aber noch Frage 206 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n=\infty$ den Wert e erhält, so folgt

$$\underset{n=\infty}{\text{Limes}}\;log_b\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=log_b\,e;$$

wir bekommen hiernach auch

$$\underset{x=0}{\text{Limes}}\frac{log_b\,(1+x)}{x}=log_b\,e$$

oder es ist

$$6)\quad M_b = \log_b e \;\ldots\ldots\; \text{№ } 68$$

d. h. der Modulus des Logarithmensystems von der Basis b ist gleich dem Logarithmus der Zahl e in diesem Logarithmensystem. Hiermit geht unsere logarithmische Reihe No. 5 über in

$$7)\quad \log_b (1+x) = \log_b e \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right) \text{ № } 69$$

Frage 211. Welchen Wert erhält der Modulus für das natürliche Logarithmensystem?

Antwort. Im natürlichen Logarithmensystem ist die Basis $b = e$, daher

$$8)\quad M_e = \log_e e = le = 1.$$

Hierdurch erhalten wir für die natürlichen Logarithmen die logarithmische Reihe:

$$9)\quad l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \text{ № } 70$$

Frage 212. Für welche Werte von x konvergiert die logarithmische Reihe?

Erkl. 163. Aus der Konvergenz der Reihe

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

für $0 < x < +1$ kann die Konvergenz der Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

innerhalb des gleichen Gebietes sowohl aus dem Satz der Frage 175 als auch aus dem Satz der Frage 178 gefolgert werden. — Daß die letzte Reihe auch für alle Werte von x zwischen -1 und 0 konvergiert, kann leicht bewiesen werden. Wir nehmen an, daß $-1 < x < 0$ sei, und setzen $x = -x_1$; dann ist $0 < x_1 < +1$ und wir erhalten:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{4} + \ldots = (-x_1) - \frac{(-x_1)^2}{2} + \frac{(-x_1)^3}{3} - \frac{(-x_1)^4}{4} + \cdots$$
$$= -\left\{x_1 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^4}{4} + \ldots\right\}$$

Antwort. In Aufgabe 314 wurde nachgewiesen, daß die Reihe $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$ konvergiert, für $0 < x < 1$; daher konvergiert nach Frage 178 die Reihe $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ für alle Werte von x zwischen den Grenzen -1 u. $+1$. Für $x = -1$ liefert die Reihe die Summe

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots$$
$$= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right)$$

Nach Frage 158 wird der Ausdruck in der Klammer unendlich groß; für $x = -1$ zeigt hiernach die log. Reihe Divergenz. Nehmen wir jetzt noch $x = +1$, so erscheint die Summe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

Da die letzte Reihe konvergiert, liefert

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

einen endlichen negativen Grenzwert, wenn x zwischen -1 und 0 gewählt wird.

von welcher in Frage 178 die Konvergenz bewiesen worden ist. Zusammengefaßt folgt also der Satz: Die logarithmische Reihe

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

konvergiert für

$$-1 < x \leqq +1.$$

Aufgabe 434. Welches ist der Grenzwert der unendlichen Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots ?$$

Auflösung. Setzen wir in der log. Reihe $x = 1$, so wird $1 + x = 1 + 1 = 2$ und

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = 0{,}6931.$$

Frage 213. In welche Reihe geht die logarithmische über, wenn x durch $-x$ ersetzt wird?

Antwort. Wir schreiben die log. Reihe in der Form:

$$l(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots$$

$$-1 < y \leqq +1.$$

Für $y = -x$ erhalten wir jetzt:

$$10)\quad l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad \text{№ } 71$$

Diese Reihe ist nur noch konvergent für $x < 1$; für $x = +1$ liefert sie $log\, 0 = -\infty$; sie dient zur Berechnung der natürlichen Logarithmen aller Zahlen von 0 bis 1.

Frage 214. Wie läßt sich die Reihe No. 10 umändern zur Berechnung der Logarithmen der Zahlen über 1?

Antwort. Wir leiten aus No. 10 ab:

$$l\frac{1}{1-x} = l1 - l(1-x) = 0 - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{x} - \cdots\right)$$

oder

$$11)\quad l\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Da der Bruch $\frac{1}{1-x}$ einen Nenner hat, der kleiner als 1 ist, so übersteigt sein Wert die Einheit; daher können wir setzen:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + z \text{ oder } x = \frac{z}{z+1},$$

wo z jede beliebige positive Zahl sein darf. Die Formel No. 11 geht damit über in:

$$12)\quad l(1+z) = \frac{1}{1}\left(\cdot\frac{z}{z+1}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+1}\right)^3 + \cdots \quad \text{№ } 72$$

Mit dieser Formel (12) können jetzt die natürlichen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis ∞ berechnet werden.

Zur praktischen Berechnung eignen sich aber die Formeln No. 10 und No. 12 nicht, weil die betreffenden Reihen zu langsam konvergieren und deshalb zu viel Glieder ausgerechnet werden müssen, falls die Logarithmen bis auf eine größere Anzahl von Dezimalen genau gefunden werden sollen. Man bedient sich daher zur praktischen Berechnung stärker konvergierender Reihen, welche im Folgenden entwickelt werden sollen.

Frage 215. Welche Reihe erhält man für $l\frac{1+x}{1-x}$?

Antwort. Da

$$l\frac{1+x}{1-x} = l(1+x) + l\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

ist, so liefern die Reihen No. 9 und 11 direkt:

$$13)\quad l\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots\right\}$$

Das Konvergenzgebiet dieser Reihe liegt für x zwischen -1 und $+1$ mit Ausschluß der beiden Grenzen.

Nehmen wir nun $\frac{1+x}{1-x} = z$, als

$x = \frac{z-1}{z+1}$, so geht die Formel No. 13 über in:

$$14)\quad lz = 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right\} \ldots № 73$$

Diese Gleichung ist giltig für **jeden positiven Wert** von z, denn für $x = -1$ wird $z = 0$ und für $x = +1$ wird $z = \infty$. Die Reihe No. 14 **eignet sich namentlich für die Berechnung der natürlichen Logarithmen kleiner Zahlen.**

Frage 216. Wie können noch stärker konvergierende Reihen zur Berechnung der natürlichen Logarithmen erhalten werden?

Antwort. Eine noch stärker konvergierende Reihe erhalten wir, wenn wir in No. 13 die Substitution $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+z}{n}$ machen, wo n und z beliebige positive Zahlen sein sollen. Dann ist $x = \frac{z}{2n+z}$ und wir erhalten:

$$l\frac{n+z}{n} = 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\left(\frac{z}{2n+z}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \cdots\right\}$$

oder

$$15)\quad l(n+z) = ln + 2\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \cdots\right\} № 74$$

Auch diese Reihe gilt für **alle positiven Werte** von z, weil x ein echter Bruch bleibt.

Für $n = 1$ geht sie über in

$$16)\quad l(1+z) = 2\left\{\frac{z}{z+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+2}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{z}{z+2}\right)^5 + \cdots\cdots\right\} № 75$$

Vertauscht man in No. 15 die Zahlen n und z und wählt dann $n = 1$, so folgt:

$$17)\quad l(z+1) = lz + 2\cdot\left\{\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z+1)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2z+1)^5} + \cdots\right\} № 76$$

für $0 < z < \infty$.

Setzt man endlich noch in No. 13 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{z^2}{z^2-1}$, also $x=\frac{1}{2z^2-1}$, so erhält man:

$$l\frac{z^2}{z^2-1}=2\left\{\frac{1}{2z^2-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z^2-1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2z^2-1)^5}+\cdots\right\}$$ u. daraus folgt:

$$18)\quad lz=\frac{1}{2}\left\{l(z+1)+l(z-1)\right\}+\left\{\frac{1}{2z^2-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z^2-1)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2z^2-1)^5}+\cdots\cdots\cdots\right\}\text{№ 77.}$$

für $1<z<\infty$.

Mit den Formeln No. 17 und No. 18 lassen sich jetzt die natürlichen Logarithmen sämtlicher positiven Zahlen berechnen.

2. Berechnung der natürlichen Logarithmen.

Aufgabe 435. Welchen Wert hat $l\,1$?

Auflösung. Bezeichnen wir $l1$ mit x, so muß nach der Definition der natürlichen Logarithmen $1=e^x$ sein; somit ist nach der Lehre von den Potenzen $x=0$, also haben wir

$$l1=0.$$

Aufgabe 436. Berechne $l2$ bis auf 8 Dezimalstellen genau.

Auflösung. Geben wir in der Formel Nr. 16 der Zahl z den Wert 1, so erhalten wir:

$$l2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

Nun ist:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333$$

$$\frac{1}{3 \cdot 3^3} = 0,0123456790$$

$$\frac{1}{5 \cdot 3^5} = 0,0008230453$$

$$\frac{1}{7 \cdot 3^7} = 0,0000653211$$

$$\frac{1}{9 \cdot 3^9} = 0,0000056450$$

$$\frac{1}{11 \cdot 3^{11}} = 0,0000005132$$

$$\frac{1}{13 \cdot 3^{13}} = 0,0000000482$$

$$\frac{1}{15 \cdot 3^{15}} = 0,0000000046$$

$$\frac{1}{17 \cdot 3^{17}} = \underline{0,0000000005}$$

$$0,3465735902$$

Somit erhalten wir:

$$l2 = 2 \cdot 0,345735902$$
$$= 0,6931471804$$

Hierbei ist zu beachten, daß infolge der Abrundungen bei der Division die beiden letzten Stellen nicht mehr genau sind; bis auf 8 Dezimalstellen genau folgt aber sicher:

$$l2 = 0,69314718.$$

Erklärung 164.

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333$$

$$\frac{1}{3^3} = 0,0370370370$$

$$\frac{1}{3^5} = 0,0041152263$$

$$\frac{1}{3^7} = 0,0004572474$$

$$\frac{1}{3^9} = 0,0000508053$$

$$\frac{1}{3^{11}} = 0,0000056450$$

$$\frac{1}{3^{13}} = 0,0000006272$$

$$\frac{1}{3^{15}} = 0,0000000697$$

$$\frac{1}{3^{17}} = 0,0000000077$$

Aufgabe 437. Es soll $l2$ auf 15 Dezimalstellen genau berechnet werden.

Auflösung. Da

$$2 = \left(\frac{16}{15}\right)^7 \cdot \left(\frac{25}{24}\right)^5 \cdot \left(\frac{81}{80}\right)^3$$

ist, folgt

$$l2 = 7l\frac{16}{14} + 5l\frac{25}{24} + 3l\frac{81}{30};$$

Da ferner $\frac{16}{15} = \frac{1 + \frac{1}{31}}{1 - \frac{1}{31}}$;

Heft 1542	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

—— Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas. ——

Heft 20

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist

Erklärung 165. Es ist

$$\frac{16}{15}=\frac{2^4}{3\cdot 5};\quad \frac{25}{24}=\frac{5^2}{2^3\cdot 3};\quad \frac{81}{80}=\frac{3^4}{2^4\cdot 5}$$

daher:

$$\left(\frac{16}{15}\right)^7\cdot\left(\frac{25}{24}\right)^5\cdot\left(\frac{81}{80}\right)^3=\frac{2^{28}}{3^7\,.\,5^7}\cdot\frac{5^{10}}{2^{15}\,.\,3^5}\cdot\frac{3^{12}}{2^{12}\,.\,5^3}$$

$$=\frac{2^{28}\,.\,3^{12}\,.\,5^{10}}{2^{27}\,.\,3^{12}\,.\,5^{10}}=2.$$

Erklärung 166. Die Regeln, welche die Algebra über den Logarithmus eines Produktes, eines Bruches, einer Potenz und einer Wurzel gibt, gelten ganz allgemein für jede Basis des Logarithmensystems; daher ist für die natürlichen Logarithmen:

$$l(abc\ldots)=la+lb+lc+\ldots$$

$$l\,\frac{p}{q}=lp-lq$$

$$la^n=nla \text{ u.}$$

$$l\sqrt[r]{s}=\frac{ls}{r}$$

Angewandt auf $\left(\frac{16}{15}\right)^7\cdot\left(\frac{25}{24}\right)^5\cdot\left(\frac{81}{80}\right)^3=2$

folgt $l2=7l\frac{16}{15}+5l\frac{25}{24}+3l\frac{81}{80}$.

Da

$$\frac{25}{24}=\frac{1+\frac{1}{49}}{1-\frac{1}{49}} \text{ u. } \frac{81}{80}=\frac{1+\frac{1}{161}}{1-\frac{1}{161}}$$

ist, so liefert die Formel No. 13:

$$l\frac{16}{15}=2\left\{\frac{1}{31}+\frac{1}{3\cdot 31^3}+\frac{1}{5\cdot 31^5}+\frac{1}{7\cdot 31^7}+\cdots\right\}$$

$$=0{,}0645385211132571$$

$$l\frac{25}{24}=2\left\{\frac{1}{49}+\frac{1}{3\cdot 49^3}+\frac{1}{5\cdot 49^5}+\cdots\right\}$$

$$=0{,}0408219945152\,56$$

$$l\frac{81}{80}=2\left\{\frac{1}{161}+\frac{1}{3\cdot 161^3}+\cdots\right\}$$

$$=0{,}0124225200185\,56.$$

Daraus folgt:

$$l2=0{,}693147180559945.$$

Erklärung 167. Der Leser wird gebeten, die Berechnung der 3 Reihen $\frac{1}{31}+\frac{1}{3\,.\,31^3}+\ldots$ u. s. w. auf 5 Glieder durchzuführen; am einfachsten verwandelt man $\frac{1}{31}$ in einen Dezimalbruch von 16 Stellen; dieser gibt durch Division mit 31 den Wert von $\frac{1}{31^2}$; in gleicher Weise folgt dann $\frac{1}{31^3}$ u. s. w. bis $\frac{1}{31^9}$; hierauf bildet man $l\frac{16}{15}$ u. s. w.

Aufgabe 438. Berechne auf 8 Dezimalstellen genau $l3$.

Auflösung. Wir setzen in der Formel 17 für z den Wert 2 ein und erhalten:

$$l3=l2+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\cdots\right\}$$

Erkl. 168.

$$\frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{5^3} = 0{,}008$$

$$\frac{1}{5^5} = 0{,}00032$$

$$\frac{1}{5^7} = 0{,}0000128$$

$$\frac{1}{5^9} = 0{,}000000512$$

$$\frac{1}{5^{11}} = 0{,}00000002048$$

Nun ist:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5^3} = 0{,}002666667$$

$$\frac{1}{5 \cdot 5^5} = 0{,}000064000$$

$$\frac{1}{7 \cdot 5^7} = 0{,}000001829$$

$$\frac{1}{9 \cdot 5^9} = 0{,}000000057$$

$$\frac{1}{11 \cdot 5^{11}} = 0{,}000000002$$

$$0{,}202732555; \text{ daher}$$

$$2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \cdots\right) = 0{,}405465110$$

$$l2 = 0{,}693147181, \text{ somit}$$

$$l3 = 1{,}098612291.$$

Wegen der Abrundungen bei der Division ist hier die letzte Dezimale ungenau, wir lassen sie daher weg und nehmen auf 8 Dezimalen genau:

$$l3 = 1{,}09861229.$$

Aufgabe 439. Es soll $l3$ auf 15 Dezimalstellen genau berechnet werden.

Auflösung. Wir nehmen

$$3 = \left(\frac{16}{15}\right)^{11} \cdot \left(\frac{25}{24}\right)^{8} \cdot \left(\frac{81}{80}\right)^{5}$$

und rechnen:

$$l3 = 11\, l\frac{16}{15} + 8\, l\frac{25}{24} + 5\, l\frac{81}{80}$$

Die Werte von

$$l\frac{16}{15},\ l\frac{25}{24} \text{ und } l\frac{81}{80}$$

finden sich schon in Aufgabe 437; daraus erhalten wir:

$$l3 = 1{,}098612288673110.$$

Aufgabe 440. Welchen Wert hat $l4$?

Auflösung. Wegen $4 = 2^2$ ist $l4 = 2l2$; daher haben wir:

$$l4 = 1{,}386294361119891$$

oder auf 8 Stellen:

$$l4 = 1{,}38629436.$$

Aufgabe 441. Berechne auf 8 Dezimalstellen genau $l5$.

Auflösung. Aus der Formel Nr. 17 folgt für $z = 4$:

$$l5 = l4 + 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5} + \cdots\right\}$$

Nun ist

Erkl. 169.

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111111111$$

$$\frac{1}{9^3} = 0{,}0013717421$$

$$\frac{1}{9^5} = 0{,}0000169351$$

$$\frac{1}{9^7} = 0{,}0000002091$$

$$\frac{1}{9^9} = 0{,}0000000026$$

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111111111$$

$$\frac{1}{3\cdot 9^3} = 0{,}0004572473$$

$$\frac{1}{5\cdot 9^5} = 0{,}0000033870$$

$$\frac{1}{7\cdot 9^7} = 0{,}0000000299$$

$$\frac{1}{9\cdot 9^9} = 0{,}0000000003$$

$$0{,}1115717756$$
$$2$$
$$0{,}2231435512$$

$$l4 = 1{,}38629436\text{ , daher}$$
$$l5 = 1{,}60943791$$

Aufgabe 442. Ebenso mit einer Genauigkeit von 15 Dezimalen.

Auflösung. Wir setzen:

$$5 = \left(\frac{16}{15}\right)^{16}\cdot\left(\frac{25}{24}\right)^{12}\cdot\left(\frac{81}{80}\right)^{7}$$

und rechnen

$$l5 = 16l\frac{16}{15} + 12l\frac{25}{24} + 7l\frac{81}{80}.$$

Die Werte von $l\frac{16}{15}$ u. s. w. entnehmen wir der Aufgabe 437 und erhalten:

$$l5 = 1{,}609437912434100.$$

Aufgabe 443. Welchen Wert hat $l6$?

Auflösung. Aus $6 = 2 \cdot 3$ folgt:

$$l6 = l2 + l3$$

$$= 1{,}791759469233055$$

oder auf 8 Stellen:

$$l6 = 1{,}79175947.$$

Aufgabe 444. Berechne $l7$ bis auf 15 Dezimalen genau.

Auflösung. Wir setzen in der Formel No. 10

$$x = \frac{1}{50},\ 1 - x = \frac{49}{50}$$

ein, dann folgt:

$$l(1-x) = l\frac{49}{50} = l49 - l50 = l(7^2)$$

$$- l(2 \cdot 5^2) = 2l7 - l2 - 2l5.$$

Nun ist:

$$l\frac{49}{50} = l\left(1 - \frac{1}{50}\right) = -\left\{\frac{1}{50} + \frac{1}{2 \cdot 50^2} + \frac{1}{3 \cdot 50^3} + \cdots\right\}$$

Daraus folgt jetzt durch Gleichsetzung der beiden Werte:

$$l7 = \frac{1}{2}l2 + l5 - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{50} + \frac{1}{2 \cdot 50^2} + \frac{1}{3 \cdot 50^3} + \cdots\right\}$$

Erkl. 170.

$$\frac{1}{50} = 0{,}02$$

$$\frac{1}{50^2} = 0{,}0004$$

$$\frac{1}{50^3} = 0{,}000008$$

$$\frac{1}{50^4} = 0{,}00000016$$

$$\frac{1}{50^5} = 0{,}0000000032$$

$$\frac{1}{50^6} = 0{,}000000000064$$

$$\frac{1}{50^7} = 0{,}00000000000128$$

$$\frac{1}{50^8} = 0{,}0000000000000256$$

Nun ist:

$$\frac{1}{50} = 0{,}02$$

$$\frac{1}{2 \cdot 50^2} = 0{,}0002$$

$$\frac{1}{3 \cdot 50^3} = 0{,}0000026666666667$$

$$\frac{1}{4 \cdot 50^4} = 0{,}00000004$$

$$\frac{1}{5 \cdot 50^5} = 0{,}00000000064$$

$$\frac{1}{6 \cdot 50^6} = 0{,}0000000000106667$$

$$\frac{1}{7 \cdot 50^7} = 0{,}0000000000001828$$

$$\frac{1}{8 \cdot 50^8} = 0{,}0000000000000032$$

$$0{,}0202027073175194$$

daher

$$\begin{aligned} \text{Klammer} &= -0{,}0101013536587597 \\ +l5 &= +1{,}609437912434100 \\ +\tfrac{1}{2}l2 &= +0{,}346573590279972 \end{aligned}$$, daraus folgt

$$l7 = 1{,}945910149055313$$ oder

auf 8 Dezimalen abgerundet:

$$l7 = 1{,}94591015.$$

Aufgabe 445. Wie groß sind jetzt $l8$, $l9$ und $l10$?

Auflösung. Aus $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \cdot 5$ folgt:

$l8 = 3l2$, $l9 = 2l3$ und $l10 = l2 + l5$; dies ergibt:

$$\begin{aligned} l8 &= 2{,}079441541679836, \\ l9 &= 2{,}197224577346220 \\ l10 &= 2{,}302585092994046, \end{aligned}$$

also auf 8 Dezimalen:

$$\begin{aligned} l8 &= 2{,}07944154 \\ l9 &= 2{,}19722458 \\ l10 &= 2{,}30258509. \end{aligned}$$

Aufgabe 446. Berechne $l11$ bis auf 8 Dezimalstellen genau.

Auflösung. Wir setzen in der No. 9 $x = \frac{1}{10}$; dies gibt $1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$, $l(1+x) = l11 - l10$; daraus folgt:

$$l11 = l10 + \left\{\frac{1}{10} - \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} - \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \cdots\right\}$$

Erkl. 171.

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &= 0{,}1 \\ \frac{1}{3 \cdot 10^3} &= 0{,}000333333 \\ \frac{1}{5 \cdot 10^5} &= 0{,}000002 \\ \frac{1}{7 \cdot 10^7} &= 0{,}000000014 \\ &\ 0{,}100335347 \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 10^2} &= 0{,}005 \\ \frac{1}{4 \cdot 10^4} &= 0{,}000025 \\ \frac{1}{6 \cdot 10^6} &= 0{,}000000167 \\ \frac{1}{8 \cdot 10^8} &= 0{,}000000001 \\ &\ -0{,}005025168 \\ &\ +0{,}100335347 \\ \text{Klammer} &= +0{,}095310179 \\ l10 &= 2{,}30258509, \end{aligned}$$

somit erhalten wir:

$$l11 = 2{,}39789527$$

Aufgabe 447. Berechne ebenso $l\,13$.

Auflösung. Wir nehmen in der Formel No. 9

$$x = \frac{1}{1000},\quad 1 + x = \frac{1001}{1000} = \frac{13 \cdot 7 \cdot 11}{1000}$$

und erhalten damit:

$$l\,13 = 3l\,10 - l\,7 - l\,11 + \left\{\frac{1}{1000} - \frac{1}{2 \cdot 1000^2} + \frac{1}{3 \cdot 1000^3} - \cdots\right\}$$

$$\begin{aligned} &= 6{,}90775527 \\ &- 4{,}34380542 \\ &+ 0{,}00099950 \\ &= 2{,}56494935. \end{aligned}$$

Aufgabe 448. Ebenso $l\,17$.

Auflösung. Für

$$x = \frac{1}{50},\quad 1 + x = \frac{51}{50} = \frac{17 \cdot 3}{50}$$

folgt der Formel No. 9:

$$l\,17 = l\,5 + l\,10 - l\,3 + \left\{\frac{1}{50} - \frac{1}{2 \cdot 50^2} + \frac{1}{3 \cdot 50^3} - \cdots\right\}$$

$$\begin{aligned} &= +\,3{,}91202301 \\ &\quad -\,1{,}09861229 \\ &\quad +\,0{,}01980263 \\ &= \quad 2{,}83321335 \end{aligned}$$

Aufgabe 449. Ebenso $l\,19$ auf 7 Dezimalstellen genau.

Auflösung. Nach der Formel No. 18 wird:

$$l\,19 = \frac{1}{2}\left\{l\,20 + l\,18\right\} + \left\{\frac{1}{2 \cdot 19^2 - 1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2 \cdot 19^2 - 1)^3} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{3l\,2 + 2l\,3 + l\,5\right\} + \left\{\frac{1}{721} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{721^3}\right\},$$

denn alle folgenden Glieder fallen wegen ihrer Kleinheit weg. Die Ausrechnung ergibt so:

$$\begin{aligned} l\,19 &= 2{,}9430520 + 0{,}0013870 \\ &= 2{,}9444390. \end{aligned}$$

Frage 217. Welche Vereinfachung tritt hienach bei der Berechnung der natürlichen Logarithmen für Zahlen über 19 ein, wenn die Genauigkeit auf 7 Dezimalen beschränkt wird?

Antwort. In der Formel No. 18 fallen, wenn $z > 19$ angenommen wird, alle Glieder, welche auf $\frac{1}{2z^2-1}$ folgen, als zu klein für die Rechnung weg, und letztere beschränkt sich auf

$$19)\quad lz = \frac{1}{2}\left\{l(z+1) + l(z-1)\right\} + \frac{1}{2z^2-1}$$

Für Zahlen über 160 rechnet man noch einfacher mit der abgekürzten Formel No. 17:

$$20)\quad l(z+1) = lz + \frac{2}{2z+1}.$$

Aufgabe 450. Berechne $l23$ auf 7 Dezimalstellen.

Auflösung. Es wird:

$$\begin{aligned} l23 &= \frac{1}{2}\left\{l24 + l22\right\} + \frac{1}{2\cdot 23^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2}\left\{4l3 + l3 + l11\right\} + \frac{1}{1057} \\ &= 3{,}1345481 \\ &\ \ + 0{,}0009461 \\ &= 3{,}1354942. \end{aligned}$$

Aufgabe 451. Es soll aus $l200$ der Wert von $l201$ gefunden werden.

Auflösung. Es ist nach Formel No. 20:

$$\begin{aligned} l201 &= l200 + \frac{2}{401} \\ &= 4\,log\,2 + 2\,log\,5 + \frac{2}{401} \\ &= 5{,}3033048. \end{aligned}$$

Frage 218. Wie läßt sich hienach eine Tafel der natürlichen Logarithmen der ganzen Zahlen anlegen?

Antwort. Aus den bisher berechneten Logarithmen lassen sich jetzt nach den bekannten Regeln über Logarithmen die Logarithmen aller

Zahlen finden, welche Produkte und Potenzen derjenigen Zahlen sind, deren Zahlen schon berechnet sind. Gelangt man dann zu einem noch nicht bekannten Logarithmus einer Primzahl z, so lassen sich die Logarithmen der beiden benachbarten Zahlen $z-1$ und $z+1$, welche keine Primzahlen sind, aus dem Vorhergehenden finden; die Formel No. 18 ermöglicht dann auch die Berechnung von lz usw.

3. Andere Logarithmensysteme. Die gemeinen Logarithmen. Proportionalteile.

Frage 219. Wie läßt sich aus dem natürlichen Logarithmus einer Zahl z der Logarithmus dieser Zahl im Logarithmensystem von der Basis b finden, wenn b eine beliebig gewählte Zahl größer als 1 ist?

Antwort. Bezeichnen wir den Logarithmus der Zahl $1+x$ im System von der Basis b mit $log_b(1+x)$, so ist nach Frage 210

$$log_b\,(1+x) = M_b \cdot l(1+x).$$

Setzen wir nun $1+x=z$, so folgt

$$1)\quad log_b\, z = M_b \cdot l\, z.$$

Hierin ist nach Seite 297 die Größe M_b der Modulus des Systems von der Basis b; nach Seite 299 haben wir

$$2)\quad M_b = log_b\, e.$$

Da nun

$$b = e^{lb};\; z = e^{lz} \text{ u. } z = b^{log_b z}$$

sein muß, so folgt durch Gleichsetzung:

$$e^{lz} = (e^{lb})^{log_b z} = e^{lb\,.\,log_b z} \text{ und daraus}$$

$$lz = lb \cdot log_b\, z;$$

daraus erhalten wir für $z=e$:

$$1 = lb \cdot log_b\, e; \text{ somit ist:}$$

$$3)\quad log_b e = \frac{1}{lb} \text{ und daher ist auch}$$

nach (2)

$$4)\quad M_b = \frac{1}{lb} \text{ und}$$

$$5)\quad log_b z = \frac{lz}{lb}. \qquad № 79$$

d. h. wir haben Satz I:

Um den Logarithmus einer Zahl z in dem System von der Basis b zu berechnen, hat man den natürlichen Logarithmus von z durch den natürlichen Logarithmus der Basis b zu dividieren.

Satz II. Der Modulus M_b des des Systems von der Basis b ist $= \frac{1}{lb}$.

Satz III. Der Logarithmus der Zahl z wird auch gefunden, indem man den natürlichen Logarithmus der Zahl mit dem Modul des Systems multipliziert.

Aufgabe 452. Wie groß ist der Logarithmus von 100 im System von der Basis 12?

Auflösung. Es wird $log_{12} 100$

$$= \frac{l100}{l12} = \frac{4,6052}{2,4849} = 1,8532.$$

Aufgabe 453. Berechne $log_5 17$.

Auflösung. Es ist $log_5 17$

$$= \frac{l17}{l5} = \frac{2,8332}{1,6084} = 1,7615.$$

Frage 320. Welchen Wert hat der Modulus der gemeinen Logarithmen?

Antwort. Da die gemeinen oder Brigg'schen Logarithmen die Basis 10 haben, so folgt

$$M_{10} = \frac{1}{l10} \text{ oder es ist}$$

$$6)\quad M_{10} = \frac{1}{2,30258509299} = 0,434294481903 \qquad № 80$$

Frage 221. Wie erhält man hieraus den gemeinen Logarithmus einer Zahl z?

Antwort. Man berechnet nach einer der früheren Formeln den natürlichen Logarithmus lz von z und multipliziert denselben mit dem Modul M_{10}, dessen genauer Wert die Formel 6 gibt. z. B. wird

$$\begin{aligned}
log 2 &= Ml2 = 0{,}3010300\\
log 3 &= Ml3 = 0{,}4771213\\
log 4 &= Ml4 = 0{,}6020600\\
log 5 &= Ml5 = 0{,}6989700\\
log 6 &= Ml6 = 0{,}7781513\\
log 7 &= Ml7 = 0{,}8450980\\
log 8 &= Ml8 = 0{,}9030900\\
log 9 &= Ml9 = 0{,}9542425\\
log 10 &= Ml10 = 1
\end{aligned}$$

Frage 222. Wie läßt sich aus diesen Logarithmen der gemeine Logarithmus einer beliebigen anderen Zahl finden?

Antwort. Wir multiplizieren die Formeln 9, 10, 13 der Fragen 211, 213 und 215 mit M_{10} durch und erhalten so:

$$7)\quad log\,(1+x) = M_{10}\left\{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots\right\} \quad \text{№ } 81$$

$$8)\quad log\,(1-x) = -M_{10}\left\{x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right\} \quad \text{№ } 82$$

$$9)\quad log\,\frac{1+x}{1-x} = 2\,M_{10}\left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right\} \quad \text{№ } 83$$

In diesen Reihen No. 7—9 muß x kleiner als 1 angenommen werden; ferner erhalten wir aus Frage 216:

$$10)\quad log\,(z+1) = log\,z + 2\,M_{10}\left\{\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z+1)^3} + \cdots\right\} \quad \text{№ } 84$$

$$11)\quad log\,z = \frac{1}{2}\left\{log\,(z+1) + log\,(z-1)\right\}$$
$$+ M_{10}\left\{\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z^2-1)^3} + \cdots\right\} \quad \text{№ } 85$$

$$12)\quad log\,(n+z) = log\,n + 2\,M_{10}\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \cdots\right\} \quad \text{№ } 86$$

In den Reihen No. 10—12 ist der Wert der Zahl z ganz beliebig.

Aufgabe 454. Berechne $log\,101$ auf 5 Dezimalstellen.

Auflösung. Nach Formel No. 10 erhalten wir für $z = 100$:

$$log\,101 = log\,100 + 2M_{10}\left\{\frac{1}{201} + \frac{1}{3\cdot 201^3}\right\}$$
$$= 2 + 2M_{10}\cdot\frac{3\cdot 40401 + 1}{3\cdot 201^3}$$
$$= 2 + 2M_{10}\cdot\frac{121204}{3\cdot 201^3}$$
$$= 2 + 0{,}00432 = 2{,}00432$$

Aufgabe 455. Ebenso $log\,1003$.

Auflösung. Aus der Formel No. 12 folgt für $n = 1000$ und $z = 3$:

$$log\,1003 = log\,1000 + 2M_{10}\cdot\frac{3}{2003}$$
$$= 3 + \frac{6M_{10}}{2003} = 3{,}00130$$

Frage 223. Wie groß ist $log\,e$?

Antwort. Nach Formel No. 2 Seite 212 ist:

$$13)\quad log\,e = M_{10} = 0{,}43429448.$$

Frage 224. Wie groß ist $log\,M_{10}$?

Antwort. Es ist

$$log\,M_{10} = log\,0{,}43429448 \text{ oder}$$
$$14)\quad log\,M_{10} = 0{,}63778431 - 1.$$

Frage 225. Welche Reihe erhalten wir aus der Formel No. 7 für $x = \frac{d}{n}$, wo $d < n$ gedacht ist?

Antwort. Die Formel No. 7 gibt, wenn wir für x den echten Bruch $\frac{d}{n}$ einsetzen:

$$log\left(1 + \frac{d}{n}\right) = M_{10}\left\{\frac{d}{n} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{d}{n}\right)^3 - \cdots\right\}$$

oder

$$15)\quad log(n + d) = log\,n + M_{10}\left\{\frac{d}{n} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{d}{n}\right)^3 - \cdots\right\}$$

Frage 226. Wie vereinfacht sich die Formel No. 15_3 wenn $\frac{d}{n}$ ein sehr kleiner Bruch ist?

Antwort. In diesem Fall können die Brüche

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{n}\right)^2, \frac{1}{3}\left(\frac{d}{n}\right)^3 \text{ u. s. w.}$$

vernachlässigt werden; dadurch folgt:

$$16)\quad log(n+d) - log\, n = M_{10} \cdot \frac{d}{n} \quad \text{№ } 87$$

Frage 227. Welche Folgerung gestattet diese Formel?

Antwort. Stellt n eine große Zahl vor, sind dagegen d und d_1 zwei kleine Zahlen, welche wenig verschieden sind, so ist auch $log(n+d_1) - log\, n = M_{10} \cdot \frac{d_1}{n}$; daraus erhalten wir:

$$\frac{log(n+d) - log\, n}{log(n+d_1) - log\, n} = \frac{d}{d_1}$$

oder:

$$17)\quad \left\{log(n+d) - log\, n\right\} : \left\{log(n+d_1) - log\, n\right\} = \left\{(n+d) - n\right\} : \left\{(n+d_1) - n\right\} \quad \text{№ } 88$$

d. h. den Satz: Die Unterschiede der Logarithmen zweier Zahlen $n+d_1$ und $n+d_1$ von dem Logarithmus einer dritten Zahl n verhalten sich wie die Unterschiede der zugehörigen Zahlen, wenn diese Unterschiede d und d_1 im Vergleich zu der Zahl n sehr klein sind.

Frage 228. Was ergibt sich aus diesem Satz, wenn wir n als eine große Zahl, d gleich einem echten Bruch q und $d_1 = 1$ annehmen?

Antwort. Die Formel 17 liefert

$$\left\{log(n+q) - log\, n\right\} : \left\{log(n+1) - log\, n\right\} = q : 1$$

oder:

$$18)\quad log(n+q) = log\, n + q\left\{log(n+1) - log\, n\right\} \quad \text{№ } 89$$

Auf dieser Formel beruht die Berechnung der Proportionalteile, also das Interpolationsverfahren bei dem Gebrauch der Logarithmentafeln, welches in jedem Logarithmenbuch angegeben ist.

Aufgabe 456. Es ist gegeben:

$$log\,2218 = 3{,}34596$$
$$log\,2219 = 3{,}34616$$

Wie groß ist $log\,2218{,}7$?

Auflösung. Hier ist $n = 2218$, $h + 1 = 2219$, $q = 0{,}7$; daher muß sein:

$$log\,2218{,}7 = log\,2218{,}7$$
$$+ 0{,}7 \left\{ log\,2219 - log\,2218 \right\}$$
$$= 3{,}34596 + 0{,}7 \cdot 0{,}00020$$
$$= 3{,}34610$$

Weitere Beispiele findet der Leser in der Beschreibung der Einrichtung und des Gebrauchs der Tafeln in jedem Logarithmenbuch.

4. Übungsbeispiele.

Aufgabe 457. Welches ist der Grenzwert der Funktion

$$\frac{l(1+x) - x}{x^2}$$

für $x = 0$?

Auflösung. Aus

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

folgt

$$\frac{l(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + \dots$$

Lassen wir die unabhängig veränderliche Größe x zu Null werden, so erhält in

$$\frac{l(1+x) - x}{x^2}$$

sowohl der Zähler als auch der Nenner den Wert Null, der Bruch erscheint demnach unter der Form $\frac{0}{0}$ und sein Wert ergibt sich dann aus der rechten Seite für $x = 0$, also $= -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 458. Berechne ebenso den Grenzwert der Funktion $\frac{lx-ly}{x-y}$ für $y=x$.

Erkl. 172. Von der Formel No. 19 macht man in der Differenzialrechnung Anwendung zur Bestimmung des Differenzialquotienten von lx.

Auflösung. Es ist für $x-y<y$:

$$lx-ly=l\frac{x}{y}=l\left(1+\frac{x-y}{y}\right)$$

$$=\frac{x-y}{y}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-y}{y}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-y}{y}\right)^3\cdots$$

Daraus folgt:

$$\frac{lx-ly}{x-y}=\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-y}{y^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-y)^2}{y^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x-y)^3}{y_4}+\cdots$$

Lassen wir jetzt y den Wert x erreichen, so wird $x-y=0$, und es verschwinden rechts vom Gleichheitszeichen alle Glieder mit Ausnahme des ersten, welches in $\frac{1}{x}$ übergeht.

Somit erhalten wir für $y=x$:

$$19)\quad \frac{lx-ly}{x-y}=\frac{1}{x} \quad \ldots \text{№ } 100$$

Aufgabe 459. Bei der Temperatur von 0^0 betrage im Ort A_1 der Barometerstand B_1 mm und gleichzeitig sei im höher gelegenen Ort A_2 der Barometerstand $=B_2$ mm; dann berechnet sich nach den Gesetzen der Physik der Höhenunterschied H der beiden Orte aus der Formel:

$$H=10{,}52\cdot\frac{\log B_1-\log B_2}{\log 760-\log 759}\ \text{Meter}$$

Es soll eine Näherungsformel für diesen Ausdruck entwickelt werden.

Auflösung. In der Formel

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2M\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)$$

setzen wir:

$$\frac{B_1}{B_2}=\frac{1+x}{1-x},$$

dann ist:

$$x=\frac{B_1-B_2}{B_1+B_2};$$

dies liefert:

$$\log\frac{B_1}{B_2}=2M\left\{\frac{B_1-B_2}{B_1+B_2}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{B_1-B_2}{B_1+B_2}\right)^3+\cdots\right\}$$

Daher ist auch:

$$\log\frac{760}{759}=2M\left\{\frac{1}{1519}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1519^3}+\cdots\right\}$$

Beschränken wir uns jetzt auf das erste Glied in jeder der zwei Reihen, so ergibt die Division:

$$\frac{\log B_1 - \log B_2}{\log 760 - \log 759} = 1519 \cdot \frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2}.$$

Somit wird:

$$H = 10{,}52 \cdot 1519 \cdot \frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2} = 15980 \cdot \frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2} \text{ Meter.}$$

5. Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 460. Berechne aus den früher angegebenen Werten die natürlichen Logarithmen der Zahlen 28 und 30, und dann aus letzteren $l\,29$.

Aufgabe 461. Ebenso $l\,36$, $l\,38$, und aus diesen $l\,37$.

Aufgabe 462. Warum ist

$$\log 37 = 3 - \log 3 - M\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000^2}\right)?$$

Aufgabe 463. Beweise, daß

$$\log 41 = \frac{1}{2}(\log 41 + \log 42) + \frac{M}{2 \cdot 41^2 - 1}$$

und berechne daraus $l\,41$.

Aufgabe 464. Beweise, daß

$$\log 169 = \log 168 + \frac{M}{2 \cdot 168 + 1}.$$

Aufgabe 465. Beweise, daß für fünfstellige gemeine Logarithmen der Logarithmus einer über 1000 liegenden Zahl das arithmetische Mittel zwischen den Logarithmen der beiden Nachbarzahlen ist.

X. Die goniometrischen Reihen.

I. Allgemeine Erklärungen. Hilfsformeln.

Frage 229. Was ist unter goniometrischen Reihen zu verstehen?

Erkl. 173. Die Bezeichnung „goniometrisch“ stammt vom griechischen Wort ἡ γωνία der Winkel, die Ecke und μετρέω messen.

Erkl. 174. Über den Verlauf von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\alpha$ für den Winkel α zwischen 0° und 360° findet der Leser genauen Aufschluß in Kleyer, Lehrbuch der Trigonometrie und Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.

Antwort. Stellt α ein in Graden, Minuten u. Sekunden ausgedrückter Winkel vor, so haben die 4 Größen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ bestimmte Werte: ändert sich der Wert von α, so ändern sich mit ihm auch die Werte der vorigen 4 trigonometrischen Größen in bekannter Weise; letztere sind hiernach Funktionen des Winkels α, oder kurz goniometrische Funktionen. Wie wir b^x, e^x, $l(x)$, $\log x$ in unendliche Reihen entwickelt haben, so kann jetzt die Aufgabe gestellt werden, auch die goniometrischen Funktionen in der Form von unendlichen Reihen darzustellen, welche goniometrische Reihen genannt werden sollen.

Bevor wir an diese Aufgaben herantreten, müssen wir einige einleitende Sätze vorausschicken.

Frage 230. Wie kann der in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückte Winkel α durch eine unbenannte Zahl x angegeben werden?

Antwort. Ist ein Winkel α gegeben, ausgedrückt in Graden, Minuten und Sekunden, so können wir um seine Spitze mit beliebigen Halbmessern, deren Längen $= r_2\,cm$ $= r_1\,cm$ und $r = 1\,cm$ sind, 3 Bogen beschreiben, deren gemeinschaftlicher Centriwinkel der gegebene Winkel ist: dadurch erhalten wir 3 Bogenlängen, welche $x_2\,cm$, $x_1\,cm$ und $x\,cm$ messen sollen.

Math. 96.

Heft 1543	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-**, Strassen-, Eisenbahn-, **Wasser-**, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.**
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthilfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

— Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. **A. Haas.** —

Heft 21

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist

Nun zeigt die Geometrie, daß die drei Brüche

$$\frac{x_2}{r_2}, \ \frac{x_1}{r_1} \text{ und } \frac{x}{r}$$

den nämlichen Wert haben, und zwar wegen $r = 1$ den Wert x, der nur von der Größe des Winkels α abhängt; wenn α im gewöhnlichen Winkelmaß gegeben ist, so läßt sich auch der Wert der zugehörigen Zahl x bestimmen und umgekehrt. Statt die Gradzahl α des Winkels in die Rechnung einzuführen, nehmen wir den Quotienten der Bogenlänge durch den Halbmesser oder einfacher die Bogenlänge x im Kreis vom Halbmesser $r = 1$.

Frage 231. Wie läßt sich aus der Gradzahl α eines Winkels sein Bogenmaß x finden?

Antwort. Nach unserer vorigen Bestimmung ist x die Bogenlänge im Kreis vom Halbmesser 1, welche zum Centriwinkel α gehört. Weil der ganze Kreisumfang $= 2\pi$ ist, ergibt sich die Proportion:

$$x : 2\pi = \alpha^0 : 360^0;$$

daraus folgt:

$$1) \quad x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \cdot = 0{,}01745329 \cdot \alpha \text{ und}$$

$$\log x = \log \alpha + 8.24187737 - 10$$

Aufgabe 466. Es sollen die am häufigsten vorkommenden Winkel in Bogenmaß ausgedrückt werden?

Auflösung. Wir erhalten für:

$\alpha = 0^0$	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0
$x = 0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$

$\alpha = 150^0$	180^0	225^0	270^0	315^0	360^0
$x = \frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

$\alpha = 450^0$	540^0	720^0	1080^0	1440^0	usw.
$x = \frac{5}{2}\pi$	3π	4π	6π	8π	

$\alpha = -30^0$	-45^0	-60^0	-90^0	
$x = -\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	usw.

Aufgabe 467. Wie groß ist das Bogenmaß x des Winkels

$$\alpha = 163^0\ 17'\ 24''?$$

Auflösung. Hier ist $\alpha = 163^0\,17'\,24'' = 163,29^0$; somit wird $x = \frac{\pi}{180} \cdot 163,29 = 2,84996$. — Eine II. Lösungsweise erhalten wir mit der „Tafel der Längen der Kreisbogen für den Radius $= 1$“, welche in den meisten Logarithmentafeln enthalten ist.

Dort findet man:

$$\begin{array}{ll} \text{Arcus } 163^0 &= 2,84489 \\ \quad\text{„}\quad 17' &= 0,00495 \\ \quad\text{„}\quad 24'' &= 0,00012; \end{array}$$

daraus folgt

$$x = \text{Arcus } 163^0\ 17'\ 24'' = 2,84996.$$

Frage 232. Wie erhält man aus dem Bogenmaß x eines Winkels seinen Wert in Graden etc.?

Antwort. Mittelst der Proportion

$$x : 2\pi\alpha = \alpha^0 : 360^0$$

leiten wir ab:

$$2)\quad \alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x = 57,2957795 \cdot x \text{ Grade}$$

und $log\,\alpha = log\,x + 1.75812263$

Aufgabe 468. Wieviel Grad mißt der Winkel, dessen Bogenmaß $x = 4,9352$ ist?

Auflösung. Aus

$$\begin{array}{l} log\,x = 0.6933048 \\ log\,\frac{180}{\pi} = 1.7581226 \text{ folgt} \\ \hline log\,\alpha = 2.4514274; \text{ dies} \end{array}$$

gibt

$$\alpha = 282,76^0$$
$$\alpha = 282^0\ 45',97 \text{ oder}$$
$$\alpha = 282^0\ 45'\ 58''$$

Die andere Methode zur Auffindung bietet die „Tafel der Arcus“. Dort finden wir:

$$\begin{array}{ll} 4,93520 & \\ 3,14159 \ldots\ldots\ldots & 180^0 \\ \hline 1,79361 & \\ 1,78024 \ldots\ldots\ldots & 102^0 \\ \hline 0,01337 & \\ 0,01309 \ldots\ldots\ldots\ldots & 45' \\ \hline 0,00028 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 58'' \end{array}$$

$$\alpha = 282^0\ 45'\ 58''.$$

Aufgabe 469. Wieviel Grade mißt der Winkel, dessen Bogenmaß $x = 1$ ist?

Auflösung. Aus der Gleichung 2) leiten wir für $x = 1$ ab:

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \text{ Grade} = 57{,}2957795 \text{ Grade}$$

$$\alpha = 57^0\,17'\,44{,}806''.$$

Frage 233. Welche Bezeichnung ist für das Bogenmaß x eines Winkels, der α Grade mißt, eingeführt worden, und wie ändert sich jetzt die Bezeichnung der trigonometrischen Funktionen?

Antwort. Man heißt das Bogenmaß x den „Arcus" des Winkels α und schreibt:

$$3)\quad x = \text{arc}\,\alpha.$$

So ist:

$$\frac{\pi}{2} = \text{arc}\,90^0,\ 2\pi = \text{arc}\,360^0,$$

$$4\pi = \text{arc}\,720^0 \text{ usw.}$$

Anstatt $\sin\alpha$ schreiben wir jetzt $\sin x$, statt $\cos\alpha$ ebenso $\cos x$ usw. Hienach ist identisch:

$$\sin 30^0 \text{ und } \sin\frac{\pi}{6},\ \cos 150^0 \text{ und}$$

$$\cos\frac{5\pi}{6},\ \text{tg}\,90^0 \text{ und } \text{tg}\,\frac{\pi}{2},\ \text{cotg}\,1080^0$$

$$\text{und cotg.}\,6\pi.$$

Ebenso:

$$\sin(-45^0) \text{ und } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\cos(-135^0) \text{ u. } \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \text{ usw.}$$

Ist wie oben $x = \text{arc}\,\alpha$ und noch $y = \text{arc}\,\beta$, so wird

$$x + y = \text{arc}\,(\alpha + \beta) \text{ und}$$
$$x - y = \text{arc}\,(\alpha - \beta);$$

identisch sind daher auch $\sin(\alpha+\beta)$ und $\sin(x+y)$ oder $\text{tg}\,(\alpha-\beta)$ und $\text{tg}\,(x-y)$; hiemit geht

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

über in:

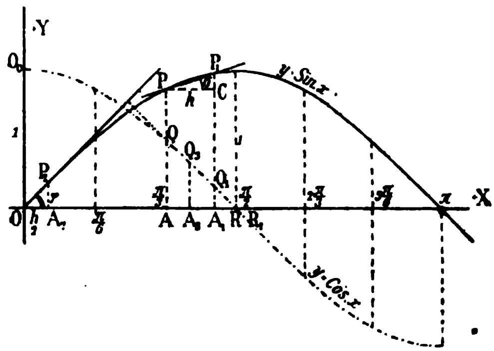
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

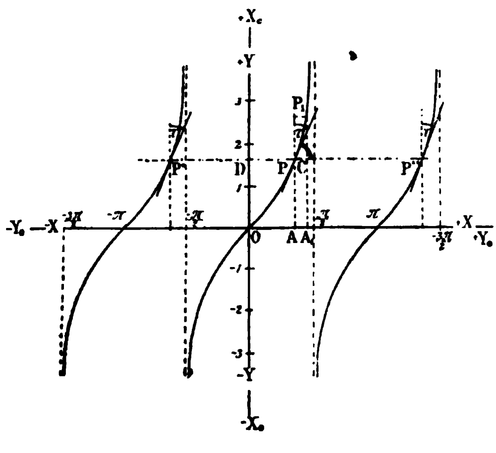
und ebenso

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \text{ in}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y} \text{ usw.}$$

Frage 234. Welche Werte durchlaufen die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$, wenn die unabhängige Veränderliche x von 0 an unbegrenzt wächst oder abnimmt?





Antwort. Nach der Trigonometrie ist $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin 2\pi = 0$; ferner ist:

$$\begin{aligned}
\sin(\pi - x) &= +\sin x\\
\sin(\pi + x) &= -\sin x\\
\sin(2\pi - x) &= -\sin x\\
\sin(2\pi + x) &= \sin x\\
\sin(-x) &= -\sin x \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Somit ist $\sin x$ eine periodische Funktion der Art, daß sich ihre Werte wiederholen, wenn x um 2π zugenommen hat.

Ferner ist:

$$\cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = +0,\ \cos\pi = -1,$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0,\ \cos 2\pi = 1;$$

$$\begin{aligned}
\cos(\pi - x) &= -\cos x,\\
\cos(\pi + x) &= -\cos x,\\
\cos(2\pi - x) &= +\cos x,\\
\cos(2\pi + x) &= +\cos x,\\
\cos(-x) &= +\cos x.
\end{aligned}$$

Es ist also $\cos x$ auch eine periodische Funktion mit der Periode 2π.

Weiter ist

$$\operatorname{tg}0 = 0,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty,\ \operatorname{tg}\pi = 0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} = -\infty,\ \operatorname{tg}2\pi = 0;$$

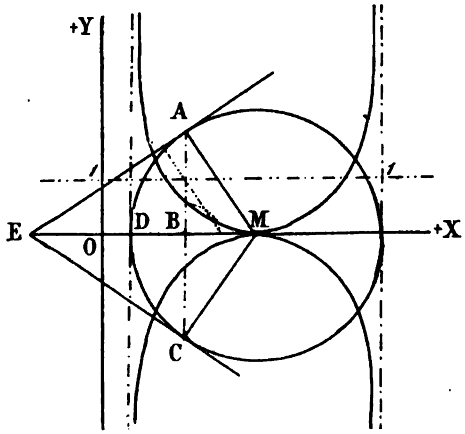
$$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg}x,\ \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg}x,$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(2\pi - x) &= -\operatorname{tg}x,\\
\operatorname{tg}(2\pi + x) &= +\operatorname{tg}x,\\
\operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg}x \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Hienach ist $\operatorname{tg} x$ eine periodische Funktion mit der Periode π.

Analog liegen die Verhältnisse bei $\operatorname{cotg} x$. (Siehe die beiden Figuren).

Aufgabe 470. Es sollen die drei Größen x, $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$ mit einander verglichen werden.



Auflösung. Es sei M des Kreises vom Halbmesser $r = 1$; auf seinem Umfang geben wir dem Bogen AC die Länge $2x$; in den Endpunkten A und C ziehen wir die Tangenten AE und CE; ihren Schnittpunkt E verbinden wir mit M; dabei halbiere ME den Bogen AC in D und die Sehne AC in B. Nun ist $AD = x$, $AB = \sin x$ und $AE = \operatorname{tg} x$.

Da

$$AE + EC > ADC > AB + BC$$

ist, so folgt:

$$2 \operatorname{tg} x > 2x > 2 \sin x$$

und daraus:

$$4) \quad \operatorname{tg} x > x > \sin x.$$

Frage 235. Welchen Grenzwert erreicht der Bruch $\frac{\sin x}{x}$, wenn $x = 0$ wird?

Erkl. 175. Nehmen wir

$$x = 0{,}0174533 \ (1^\circ),$$

so wird

$$\sin x = 0{,}0174524 \text{ und } \frac{\sin x}{x} = 0{,}99995.$$

Für $x = 0{,}00029089$ (1′) wird

$$\sin x = 0{,}00029089 \text{ und } \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Für $x = 0{,}00000484814$ (1″) wird

$$\sin x = 0{,}00000484814 \text{ und } \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Hienach wird auch für $x = 0$:

$$\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Antwort. Aus der soeben in haltenen Ungleichung No. 4 erhalten wir durch die Division ersin x:

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < 1;$$

Da aber $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, so geht dies über in

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Lassen wir jetzt x zu Null werden, so erreicht $\cos x$ den Wert 1, somit muß auch $\frac{\sin x}{x}$, dessen Wert stets zwischen $\cos x$ und 1 liegt, den Wert 1 erreichen.

Somit ist bewiesen, daß

$$5) \quad \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ ist} \ldots \text{№}90$$

Frage 236. Welchen Grenzwert erreicht der Bruch $\frac{\sin x - \sin y}{x - y}$, wenn $y = x$ wird?

Erkl. 176. Für $x = 0{,}52360$ (30°) und $y = 0{,}50615$ (29°) folgt:

$$\sin x = 0{,}5 \qquad \sin y = 0{,}4848$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \frac{0{,}0152}{0{,}01745} = 0{,}871$$

Nehmen wir jetzt $y = 0{,}51487$ (29° 30′) und $\sin y = 0{,}4924$, so folgt

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \frac{0{,}0076}{0{,}00873} = 0{,}870$$

Für $y = 0{,}52069$ (29° 50′) u. $\sin y = 0{,}49748$ folgt

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \frac{0{,}00252}{0{,}00291} = 0{,}866$$

Für $y = 0{,}52331$ (29° 59′) u. $\sin y = 0{,}499748$ folgt

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \frac{0{,}000252}{0{,}000291} = 0{,}866$$

Somit wird auch für $y = 0{,}52360$ (30°) der Wert des Bruches

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = 0{,}866 = \cos 0{,}52360\ (= \cos 30^0).$$

Antwort. Die Trigonometrie gibt die Formel

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

(Siehe Kleyer, Lehrbuch der Goniometrie.)

Daraus leiten wir hier ab:

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{x-y}$$

$$= \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$$

Wenn jetzt $y = x$ wird, so erhält der erste Bruch

$$\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}$$

nach der vorigen Frage den Grenzwert 1 und der andere Faktor $\cos\frac{x+y}{2}$ geht über in $\cos\frac{x+x}{2} = \cos x$; hiermit ist gezeigt, daß

$$6)\quad \operatorname*{Limes}_{x=y}\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos x. \quad \text{№ } 91$$

ist.

Frage 237. Welchen Grenzwert erreicht der Bruch $\frac{\cos x - \cos y}{x - y}$, wenn $y = x$ wird?

Erkl. 177.
Für $x = 0{,}62832$ (36°) ist $\cos x = 0{,}809017$
Für $y = 0{,}61087$ (35°) ist $\cos y = 0{,}819152$
Daraus folgt

$$\frac{\cos x - \cos y}{x - y} = -\frac{0{,}010135}{0{,}017453} = -0{,}58069$$

Für $y = 0{,}61959$ (35° 30′) ist $\cos y = 0{,}814115$
Dies liefert

$$\frac{\cos x - \cos y}{x - y} = -\frac{0{,}005098}{0{,}008723} = -0{,}58419$$

Antwort. Nach der Trigonometrie ist

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$

(Siehe Kleyer, Lehrbuch der Goniometrie.)

Daraus leiten wir hier ab:

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

und

Jetzt nehmen wir:

$y = 0{,}62803$ ($35^0\ 59'$), so folgt
$\cos y = 0{,}809188$ und damit

$$\frac{\cos x - \cos y}{x-y} = -\frac{0{,}000171}{0{,}000?909} = -0{,}58779,$$

während $-\sin 36^0 = -0{,}58785$ ist. Man sieht hieraus, daß der Wert des Bruches $\frac{\cos x - \cos y}{x-y}$ sich dem vorigen Wert immer mehr nähert und denselben erreicht, wenn $y = 0{,}62832$ (36^0) geworden ist.

Der Leser wird gebeten, sich noch durch weitere derartige Beispiele von der Richtigkeit unserer Formel über den Grenzwert zu überzeugen.

$$\frac{\cos x - \cos y}{x-y} = -\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} \cdot \sin\frac{x+y}{2}$$

Nimmt jetzt y den Wert x an, so erhält der Bruch rechts den Wert 1, während $\sin\frac{x+y}{2}$ in $\sin\frac{x+x}{2}$ oder in $\sin x$ übergeht. Hiermit ist bewiesen, daß

$$7)\ \lim_{x=y}\frac{\cos x - \cos y}{x-y} = -\sin x \text{ ist.} \quad №\,92$$

Frage 238. Welchen Grenzwert erreicht der Bruch $\frac{x^n - y^n}{x-y}$ für $y=x$, wenn n irgend eine **positive ganze Zahl** vorstellt?

Erkl. 178. Es ist:

$$\frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y$$
$$\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2+xy+y^2$$
$$\frac{x^4-y^4}{x-y} = x^3+x^2y+xy^2+y^3$$
u. s. w.

Setzen wir $y = 0{,}9x$ oder $= 0{,}99x$ oder $= 0{,}999x$ u. s. f., so erhalten wir:

$$\frac{x^2-y^2}{x-y} = x + 0{,}9x = 1{,}9x$$
$$\text{oder} = x + 0{,}99x = 1{,}99x$$
$$\text{oder} = x + 0{,}999x = 1{,}999x \text{ u.s.w.}$$

Je näher wir y an x heranrücken, desto mehr nähert sich der Wert des Bruches $\frac{x^2-y^2}{x-y}$ dem Wert $2x$, der erreicht wird für $y = x$.

In gleicher Weise wird für $y = 0{,}9x$:

$$\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2 + 0{,}9x^2 + 0{,}81x^2 = 2{,}71x^2;$$

für $y = 0{,}99x$ wird

$$\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2 + 0{,}99x^2 + 0{,}9801x^2 = 2{,}9701x^2;$$

für $y = 0{,}999x$ wird dieser Bruch

$$= x^2 + 0{,}999x^2 + 0{,}998001x^2 = 2{,}997001x^2$$
u. s. w.

Man ersieht daraus, daß

$$\lim\frac{x^3-y^3}{x-y} = 3x^2 \text{ wird für } y = x.$$

Der Lehrer wird gebeten, die Rechnung auch für höhere Potenzen und noch mit größerer Annäherung von y an x durchzuführen.

Antwort. Die Algebra liefert die Formel:

$$\frac{x^n-y^n}{x-y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots\cdots + xy^{n-2} + y^{n-1};$$

es kann die rechte Seite auf dem Weg der gewöhnlichen Division gewonnen werden; auch überzeugt man sich von ihrer Richtigkeit dadurch, daß sie mit $x - y$ multipliziert $x^n - y^n$ ergibt.

Für $y = x$ wird jedes der n Glieder der rechten Seite $= x^{n-1}$; somit muß sein:

$$8)\ \lim_{x=y}\frac{x^n-y^n}{x-y} = nx^{n-1} \quad .\ .\ №\,93$$

2. Entwicklung der Reihen für Sinus x und Cosinus x nebst Übungen.

Frage 239. Wenn es gelingen sollte, $\sin x$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende konvergente Reihe zu entwickeln, so muß letztere welchen Bedingungen genügen?

Antwort. Wir wollen annehmen, daß

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

sei; die Koeffizienten a_0, a_1, a_3 usw. kennen wir nicht; sie müssen erst bestimmt werden. Da für jeden Wert von x links und rechts vom Gleichheitszeichen dasselbe Ergebnis auftreten muß, so ist notwendig für $x = 0$

$$\sin 0 = a_0;$$

weil aber $\sin 0 = 0$ ist, so folgt, daß auch $a_0 = 0$ sein muß, wodurch unsere fingierte Reihe die Form annimmt:

$$\sin x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Aus ihr folgt:

$$\frac{\sin x}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$$

Nun ist $\frac{\sin x}{x}$ nach Frage 235 ein echter Bruch, der aber der Einheit desto näher kommt, je kleiner x wird; lassen wir den Wert von x zu Null werden, so erreicht $\frac{\sin x}{x}$ nach Formel No. 5 den Grenzwert 1; für $x = 0$ fallen aber rechts vom Gleichheitszeichen alle Glieder, welche x enthalten weg und es bleibt nur noch übrig a_1. Daraus folgt, daß der Koeffizient a_1 notwendig auch $= 1$ sein muß, wodurch unsere Reihe jetzt die Form annimmt:

$$\sin x = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Nun ist bekanntlich

$$\sin(-x) = -\sin x;$$

wir erhalten aus unserer Reihe den Wert für $\sin(-x)$, wenn wir rechter Hand vom Gleichheitszeichen $-x$ statt x setzen; d. h. es muß sein:

$$\sin(-x) = (-x) + a_2(-x)^2 + a_3(-x)^3 + a_4(-x)^4 + \cdots$$

oder ausgerechnet:

$$-\sin x = -x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + a_4 x^4 - a_5 x^5 + \cdots$$

Multiplizieren wir diese Reihe mit -1 durch, so liefert sie:

$$\sin x = x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - a_4 x^4 + a_5 x^5 - \cdots$$

Vergleichen wir diese mit der gewählten Reihe

$$\sin x = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots,$$

so finden wir, daß diese beiden Reihen nur dann übereinstimmen können, wenn die Koeffizienten a_2, a_4, a_6 von allen geraden Potenzen Null sind.

Ist also die Reihenentwicklung für $\sin x$ möglich, so wissen wir, daß $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ist, und daß ferner $a_2 = a_4 = a_6 \ldots . = 0$ sein müssen. Hienach können wir einfacher setzen:

$$\sin x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \cdots$$

Frage 240. Wie gestalten sich die Bedingungen, wenn sich $\cos x$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende konvergente Reihe entwickeln läßt?

Antwort. Wir geben der fingierten Reihe die Form:

$$\cos x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

Setzen wir in ihr $x = 0$ ein, so erhalten wir linker Hand $\cos 0$, welcher den Wert 1 hat; rechter Hand bleibt nur b_0, alle andern Glieder verschwinden; somit muß notwendig $b_0 = 1$ sein; daher schreiben wir jetzt einfacher:

$$\cos x = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

Wenn wir nun x mit $-x$ vertauschen, so folgt:

$$\cos(-x) = 1 + b_1(-x) + b_2(-x)^2 + b_3(-x)^3 + \cdots$$

Da aber $\cos(-x) = +\cos x$ ist, so erhalten wir:

$$+\cos x = 1 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + b_4 x^4 - \cdots$$

Vergleichen wir diese Reihe mit der oberen

$$\cos x = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots,$$

so ergibt sich nur Übereinstimmung, wenn die Koeffizienten b_1, b_3, $b_5 \ldots$ von allen ungeraden Potenzen Null sind.

Daraus schließen wir: Ist für $\cos x$ eine Reihenentwicklung möglich, so muß $a_0 = 1$ sein, während $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$ sein müssen. Wir können jetzt einfacher annehmen:

$$\cos x = 1 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + b_6 x^6 + \cdots$$

Frage 241. Lassen sich in

$$\sin x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots \text{ und}$$
$$\cos x = 1 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \cdots$$

den Koeffizienten a_1, a_3, $a_5 \ldots$ und b_2, b_4, b_6 usw. solche Werte beilegen, daß die beiden obigen Gleichungen identische werden?

Antwort. Es ist selbstverständlich, daß die beiden gewählten Gleichungen auch für einen anderen beliebigen Wert y der unabhängigen Veränderlichen (innerhalb des Konvergenzgebietes) richtig sein müssen; wir setzen daher:

$$\sin y = y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + \cdots$$
$$\cos y = 1 + b_2 y_2 + b_4 y^4 + \cdots$$

Dadurch können wir nun bilden:

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = 1 + a_3 \cdot \frac{x^3 - y^3}{x - y} + a_5 \cdot \frac{x^5 - y^5}{x - y} + \cdots$$

und

$$\frac{\cos x - \cos y}{x - y} = b_2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{x - y} + b_4 \cdot \frac{x^4 - y^4}{x - y} + \cdots$$

Lassen wir jetzt y den Wert x erreichen, so folgt aus den Formeln No. 6, No. 7 und No. 8:

$$\cos x = 1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + 7a_7 x^6 + \cdots$$
$$-\sin x = 2b_2 x + 4b_4 x^3 + 6b_6 x^5 + \cdots$$

Vergleichen wir diese Koeffizienten mit jenen der angenommenen Reihen, so folgt:

$$\begin{array}{ll} 2b_2 = -1 & \\ 4b_4 = -a_3 & 3a_3 = b_2 \\ 6b_6 = -a_5 & 5a_5 = b_4 \\ 8b_8 = -a_7 & 7a_7 = b_6 \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

Daraus berechnen wir:

$$b_2 = -\frac{1}{2}; \quad a_3 = \frac{b_2}{3} = -\frac{1}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3!};$$

$$b_4 = -\frac{a_3}{4} = \frac{1}{4\cdot 3!} = \frac{1}{4!}; \quad a_5 = \frac{b_4}{5} = \frac{1}{5\cdot 4!} = \frac{1}{5!};$$

$$b_6 = -\frac{a_5}{6} = -\frac{1}{6!}; \quad a_7 = \frac{b_6}{7} = -\frac{1}{7!};$$

$$b_8 = -\frac{a_7}{8} = \frac{1}{8!}; \quad a_9 = \frac{b_8}{9} = \frac{1}{9!} \text{ usw.}$$

Hieraus erhalten wir jetzt durch Substitution:

$$9)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \quad \text{№ 94}$$

$$10)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \quad \text{№ 95}$$

Frage 242. Wie heißt von der Sinusreihe No. 9 und der Cosinusreihe No. 10 je das allgemeine Glied?

Antwort. Der absolute Wert des n^{ten} Gliedes der Sinusreihe ist $= \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$; und der Cosinusreihe $= \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$; weil ferner in beiden Reihen die 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten} usw. Glieder negativ, die 1^{ten}, 3^{ten}, 5^{ten} usw. Glieder aber positiv sind, so darf man den obigen absoluten Werten nur noch den Faktor $(-1)^{n-1}$ beifügen, um die allgemeinen Glieder zu erhalten.

Deshalb ist das $n^{\underline{\underline{te}}}$ Glied der Sinusreihe:

$$11)\quad u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

und das $n^{\underline{\underline{te}}}$ Glied der Cosinusreihe

$$12)\quad u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

Frage 243. Sind die Sinusreihe und die Cosinusreihe wirklich konvergent, und welches ist ihr Konvergenzgebiet?

Antwort. Zur Prüfung der Konvergenz betrachten wir zuerst die Reihe:

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

In dieser ist:

$$u_{n+1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ und } u_n = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

daher:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2n(2n+1)} \cdot x^2.$$

Mag nun x noch so groß gewählt werden, wir kommen stets zu einem Glied der Reihe, für welches

$2n(2n+1) > x^2$ oder $x^2 < 2n(2n+1)$

wird; von diesem Glied an bleibt dann der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ beständig kleiner als 1; die obige Reihe

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

konvergiert hienach für jeden beliebigen positiven oder negativen Wert von x. — Weil die Sinusreihe noch einen regelmäßigen Zeichenwechsel bietet, so muß sie noch mehr konvergieren als die Reihe der absoluten Glieder.

Das Nämliche trifft für die Cosinusreihe zu, in welcher

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^2}{(2n-1)\cdot 2n} \text{ ist.}$$

Unser Resultat lautet also: Die Sinusreihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

und die Cosinusreihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

konvergieren für jeden beliebigen Wert von x; also für $-\infty < x < +\infty$.

Frage 244. Wie läßt sich jetzt der Nachweis erbringen, daß die beiden unendlichen Reihen

$$x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ und}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Summen ergeben, welche wirklich $= \sin x$, bezw. $\cos x$ sind?

Antwort. Wir setzen:

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\psi(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

und ebenso

$$\varphi(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots$$

$$\psi(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots$$

Dann liefert die Ausrechnung, daß

$$\varphi(x)\psi(y) + \psi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)$$
$$\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y) = \varphi(x-y)$$
$$\psi(x)\psi(y) - \varphi(x)\varphi(y) = \psi(x+y)$$
$$\psi(x)\psi(y) + \varphi(x)\varphi(y) = \psi(x-y)$$

u. s. w.

Diese Gleichungen zeigen volle Übereinstimmung mit den trigonometrischen Formeln:

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y)$$
$$\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x-y)$$
$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$$
$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y)$$

u. s. w.

Weiter läßt sich beweisen, daß $\varphi(x)$ genau den gleichen periodischen Verlauf zeigt wie $\sin x$; das gleiche gilt vom Verlauf von $\psi(x)$ verglichen mit dem von $\cos x$; woraus folgt, daß wirklich $\varphi(x) = \sin x$ und $\psi(x) = \cos x$ ist.

Erkl. 179. Der Leser wird gebeten, die Produkte $\varphi(x)\psi(y)$ und $\psi(x)\varphi(y)$ auszurechnen und ihre Summe so zu ordnen, daß dieselbe die Form

$$x + y - \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^5}{5!} - \cdots\cdots$$

annimmt.

In der gleichen Weise wäre $\psi(x)\psi(y) - \varphi(x)\varphi(y)$ in die Form:

$$1 - \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^4}{4!} - \frac{(x+y)^6}{6!} + \cdots\cdots$$

überzuführen.

Erkl. 180. Zu jeder trigonomischen Formel in $\sin x$ und $\cos x$ etc. gibt es nach dem Nebenstehenden eine gleichlautende in $\varphi(x)$, $\psi(x)$ etc. Die daraus hervorgehende Wahrscheinlichkeit, daß $\varphi(x)$ mit $\sin x$ und $\psi(x)$ mit $\cos x$ identisch sei, wird zur vollen Gewißheit durch die Untersuchung des Verlaufs des Wertes von $\varphi(x)$ bezw. $\psi(x)$, wenn wir die Veränderliche x alle Werte von 0 bis etwa 4π durchlaufen lassen.

Doch liegt die Darstellung dieser Untersuchung außerhalb des Rahmens unseres Buches.

Aufgabe 471. Es soll der Sinus des Winkels von α^0 berechnet werden.

Erkl. 181. Mit der Sinusreihe lassen sich jetzt der Wert von $\sin\alpha$ finden für jeden Winkel von 0^0 bis 45^0; diejenigen für Winkel von 45^0 bis 90^0 ergeben sich aus $\cos\alpha$ für α von 0^0 bis 45^0 nach der Formel $\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$.

Auflösung. Nach der Formel No. 1 der Frage 231 ist das zu α^0 gehörige

$$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\alpha}{90}\right).$$

Hiernach wird nach der Sinusreihe

$$\sin\alpha^0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{90} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}\left(\frac{\alpha}{90}\right)^3$$

$$+ \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}\left(\frac{\alpha}{90}\right)^5 - \cdots\cdots$$

Ausgerechnet gibt dies, da $\pi = 3{,}14159\cdots$ ist:

$$\begin{aligned}\sin\alpha^0 &= 1{,}57079633\,\frac{\alpha}{90}\\ &\quad - 0{,}64596410\left(\frac{\alpha}{90}\right)^3\\ &\quad + 0{,}07969263\left(\frac{\alpha}{90}\right)^5\\ &\quad - 0{,}00468175\left(\frac{\alpha}{90}\right)^7\\ &\quad + 0{,}00160441\left(\frac{\alpha}{90}\right)^9\\ &\quad - 0{,}00000360\left(\frac{\alpha}{90}\right)^{11}\\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Rechnen wir z. B. $\alpha = 9^0$, so wird $\frac{\alpha}{90} = 0{,}1$; hiermit folgt:

$$\begin{aligned}\sin 9^0 &= 0{,}15707963\\ &\quad - 0{,}00064596\\ &\quad + 0{,}00000080\\ &= 0{,}15643447\end{aligned}$$

Aufgabe 472. Berechne ebenso ebenso den Cosinus des Winkeln von α^0.

Auflösung. Setzen wir in die Cosinusreihe

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{90}\right)$$

ein, so liefert sie:

Erkl. 182. Mit der Cosinus-Reihe kann jetzt der Cosinus von jedem Winkel α zwischen 0^0 und 45^0 berechnet werden; die Werte der Cosinus für Winkel von 45^0 bis 90^0 ergeben sich aus den Sinus von 0^0 bis 45^0 gemäß der Formel $\cos\alpha = \sin(90-\alpha)$.

$$\cos\alpha^0 = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{\alpha}{90}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} \cdot \left(\frac{\alpha}{90}\right)^4 - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} \cdot \left(\frac{\alpha}{90}\right)^6 + \cdots$$

oder ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \cos\alpha^0 = 1 & \\ & - 1{,}23370055 \left(\frac{\alpha}{90}\right)^2 \\ & + 0{,}25366951 \left(\frac{\alpha}{90}\right)^4 \\ & - 0{,}02086348 \left(\frac{\alpha}{90}\right)^6 \\ & + 0{,}00091926 \left(\frac{\alpha}{90}\right)^8 \\ & - 0{,}00002520 \left(\frac{\alpha}{90}\right)^{10} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Als Beispiel wählen wir $\alpha = 1^0$; dann wird $\frac{\alpha}{90} = \frac{1}{90}$ und daher:

$$\begin{aligned} \cos 1^0 &= 1 \\ & \quad - 0{,}00015231 \\ & = 0{,}99984769 \end{aligned}$$

3. Entwicklung der Reihen für Tangens x und Cotangens x.

Frage 245. Wie läßt sich tang x in eine Potenzreihe entwickeln?

Erkl. 183. Die Bernouillische Zahl B_{2n-1} wird definiert durch die Formel:

$$B_{2n-1} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1} \cdot \pi^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots\right)$$

Antwort. Wir beschränken uns hier darauf zu setzen:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}$$

Dabei ist:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{945}$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\ldots=\frac{\pi^8}{9450} \quad \text{usw.}$$

Die Entwicklung dieser Ausdrücke liegt außerhalb des Rahmens unseres Buches.

Erkl. 184. Die oben genannten Zahlen stammen von Johann Bernouilli (erst veröffentlicht 1742). Unabhängig von ihm gab sie auch Euler 1740.

Da sowohl der Zähler wie der Nenner konvergieren, so dürfen wir die Division durchführen; hiebei erhalten wir:

$$13)\quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots\cdots \quad \text{№ } 96$$

Eine schärfere Untersuchung gibt:

$$14)\quad \operatorname{tg} x = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{2!}x + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{4!}x^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{6!}x^5 + \cdots\cdots\cdots \quad \text{№ } 97$$

Hierin sind B_1, B_3, B_5 usw. die Bernouilli'schen Zahlen mit den Werten:

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_3=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{1}{42};\ B_7=\frac{1}{30},\ B_9=\frac{5}{66},$$
$$B_{11}=\frac{691}{2730} \text{ usw.} \ldots\ldots \quad \text{№ } 98$$

Die Tangentenreihe konvergiert für

$$-\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2}\pi.$$

Frage 246. Wie lautet die Reihe für $\operatorname{cotg} x$?

Antwort. Aus $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ erhalten wir mittelst der gewöhnlichen Division:

$$16)\quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots \quad \text{№ } 99$$

Genauer lautet sie:

$$17)\quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{2!}x - \frac{2^4 B_3}{4!}x^3 - \frac{2^6 B_5}{5!}x_5 - \cdots \quad \text{№ } 100$$

Dieselbe konvergiert für

$$-\pi < x < +\pi.$$

Math 86

Heft 1517	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

—— Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas. ——

Heft 22

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Das Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz ist

Aufgabe 473. Für welchen Winkel ist der

$$\text{Sinus} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots ?$$

Auflösung. Nach der Sinusreihe erhält der Sinus den vorgeschriebenen Wert, wenn der Winkel $x = 1$ ist. In Graden usw. ausgedrückt ist dann der letztere nach Aufgabe 469:

$$\alpha = 57^0\, 17'\, 45''.$$

Aufgabe 474. Wie groß wird der Grenzwert des Bruches

$$\frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$$

für $x = 0$?

Auflösung. Wir erhalten durch Reihenentwicklung:

$$\frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)} = \frac{x - \left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right\}}{x\left[1 - \left\{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right\}\right]}$$

$$= \frac{x^3\left\{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \cdots\right\}}{x^3\left\{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \cdots\right\}}$$

Nehmen wir jetzt $x = 0$ an, so folgt:

$$\underset{x=0}{\text{Limes}} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)} = \frac{\frac{1}{3!}}{\frac{1}{2!}} = \frac{1}{3}.$$

---

4. Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 475. Berechne $\sin 1^0$ auf 7 Dezimalstellen genau.

Aufgabe 476. Ebenso $\sin 18^0$.

Aufgabe 477. Ebenso $\cos 2^0$.

Aufgabe 478. Ebenso $\cos 27^0$.

Aufgabe 479. Berechne auf 5 Dezimalstellen genau $\operatorname{tg} 4^0\, 30'$.

Aufgabe 480. Ebenso $\operatorname{cotg} 15^0$.

Aufgabe 481. Berechne den Grenzwert von $\frac{x - \sin x}{x^3}$ für $x = 0$.

Aufgabe 482. Ebenso von

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ für } x = 0.$$

Aufgabe 483. Ebenso von

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} \text{ für } x = 0.$$

Aufgabe 484. Ebenso von

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x - y} \text{ für } y = x.$$

XI. Die cyklometrischen Reihen.

I. Erklärung der cyklometrischen Funktionen.

Frage 246. Was ist unter cyklometrischen Funktionen zu verstehen?

Erkl. 185. Bekanntlich ist für

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$z = \sin x =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$u = \cos x =$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$v = \operatorname{tg} x =$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$w = \operatorname{cotg} x =$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Somit ergibt die Umkehrung:

$\operatorname{arc\,sin} 0 = 0$

$\operatorname{arc\,sin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\operatorname{arc\,sin} \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arc\,sin} \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{\pi}{2}$.

Ebenso:

$\operatorname{arc\,cos} 1 = 0$

$\operatorname{arc\,cos} 0{,}866 = \frac{\pi}{6}$

$\operatorname{arc\,cos} 0{,}707 = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arc\,cos} 0{,}5 = \frac{\pi}{3}$

$\operatorname{arc\,cos} 0 = \frac{\pi}{2}$.

Ferner:

$\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$

$\operatorname{arc\,tg} 0{,}577 = \frac{\pi}{6}$

$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arc\,tg} 1{,}732 = \frac{\pi}{3}$

$\operatorname{arc\,tg} \infty = \frac{\pi}{2}$.

Endlich:

$\operatorname{arc\,cotg} \infty = 0$

$\operatorname{arc\,cotg} 1{,}732 = \frac{\pi}{6}$

$\operatorname{arc\,cotg} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arc\,cotg} 0{,}577 = \frac{\pi}{3}$

$\operatorname{arc\,cotg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

Antwort. Es sei wieder x ein Bogen im Kreis vom Halbmesser 1; ferner sollen die Werte der zu ihm gehörigen trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ bezeichnet werden mit z, u, v, w, so daß $\sin x = z$, $\cos x = u$, $\operatorname{tg} x = v$, $\operatorname{cotg} x = w$ sei.

Daß x die Bogenlänge vorstellt, dessen Sinus den Wert z hat, schreibt man auch in der Form:

$$18)\quad x = \operatorname{arc}(\sin = x)$$

oder noch einfacher:

$$18a)\quad x = \operatorname{arc\,sin} z,$$

was gelesen wird:

„x gleich Arcus Sinus z“.

Ebenso wird geschrieben:

$$19)\quad x = \operatorname{arc}(\cos = u) \text{ oder } x = \operatorname{arc\,cos} u$$

$$20)\quad x = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = v) \quad „ \quad x = \operatorname{arc\,tg} v$$

$$21)\quad x = \operatorname{arc}(\operatorname{ctg} = w) \quad „ \quad x = \operatorname{arc\,ctg} w$$

Betrachtet man jetzt in

$$x = \operatorname{arc\,sin} z$$

die Größe z als die unabhängige Veränderliche, so richtet sich der Wert von x nach dem Wert von z, der Bogen x ist eine Funktion des Sinuswertes z; ebenso kann der Bogen x als eine Funktion des Cosinuswertes u, des Tangenten-

wertes v oder des Cotangentenwertes w angenommen werden. In dieser Weise gehen aus der **Umkehrung der trigonometrischen Funktionen** vier neue Funktionen hervor; sie heißen **cyklometrische oder Arcus-Funktionen.**

Erkl. 186.

Aus $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -0{,}866$

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

folgt umgekehrt:

$\operatorname{arc} \sin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\operatorname{arc} \sin\left(-0{,}866\right) = -\frac{\pi}{3}$

$\operatorname{arc} \sin\left(-1\right) = -\frac{\pi}{2}$

u. s. w.

Erkl. 187.

Aus $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

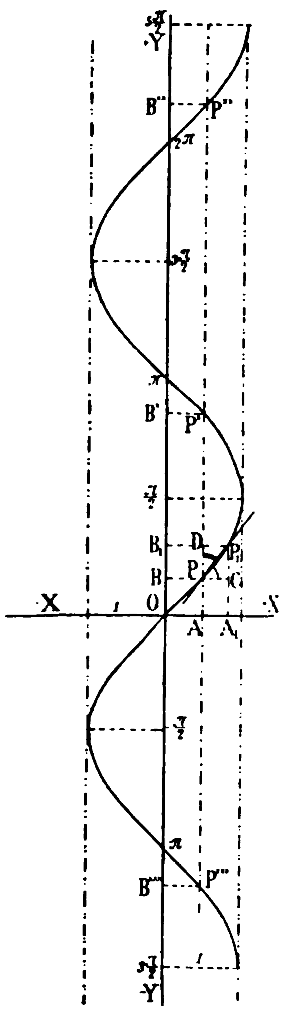
$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) = \frac{1}{2}$

. . . .

ergibt sich $\operatorname{arc} \sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ oder $= \frac{\pi}{6} + 2\pi$

oder $= \frac{\pi}{6} + 4\pi$ usw.



Frage 247. Was folgt hieraus für den Verlauf der cyklometrischen Funktion $x = \operatorname{arc} \sin z$?

Antwort. Durchläuft in $x = \operatorname{arc} \sin z$ die unabhängige veränderliche Größe z alle Werte von 0 bis 1, so wächst der zugehörige Bogen x von 0 bis $\frac{\pi}{2}$; geht ferner z von 0 bis -1, so nimmt der Bogen x ab von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$. Weil der Sinus den kleinsten Wert -1 und den größten Wert $+1$ hat, kann die unabhängige Veränderliche z sich nur von -1 bis $+1$ bewegen; weil ferner $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ ist, falls n eine ganze Zahl vorstellt, so ist auch $\operatorname{arc} \sin z = x + 2\pi n$; d. h. **es gehören zum gleichen Sinuswert z unendlich viele Bogen, welche sich um ein ganzes Vielfaches von 2π unterscheiden.** Siehe die nebenstehende Zeichnung.

2. Entwicklung der unendlichen Reihen für Arcus-Sinus und Arcus-Cosinus.

Frage 248. Was ist unter der Arcus-Sinus-Reihe zu verstehen?

Antwort. Da in $x = \arcsin z$ der Bogen x eine Funktion der unabhängigen veränderlichen Größe z ist, so läßt sich die Frage aufwerfen, ob es nicht möglich wäre, den Wert von x in eine nach ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe zn entwickeln welche konvergiert; also zu setzen:

$$x = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\cdots$$

oder:

$$\arcsin z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

Wenn eine solche Reihe gebildet werden kann, so soll sie die Arcus-Sinus-Reihe genannt werden.

Frage 249. Wenn es gelingen sollte, die Arcus-Sinus-Reihe aufzustellen, so müßten welche Bedingungen erfüllt werden?

Antwort. Nehmen wir an, es sei

$$x = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

so wird für $z = 0$ sich ergeben $x = a_0$; dem Sinuswert 0 entspricht aber der Bogenwert 0; somit folgt als erste Bedingung, daß $a_0 = 0$ sein muß.

Weiter liefert jetzt die Division mit z:

$$\frac{x}{z} = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 + \cdots\cdots$$

Lassen wir hier die Größe z auf Null heruntersinken, so bleibt auf der rechten Seite der Gleichung nur a_1 übrig; die linke Seite erscheint dann unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; weil aber $z = \sin x$ ist, so haben wir

$$\frac{x}{z} = \frac{x}{\sin x}, \text{ also}$$

$$\operatorname*{Limes}_{z=0} \frac{x}{z} = \operatorname*{Limes}_{x=0} \frac{x}{\sin x}$$

Auf Seite 325 wurde bewiesen, daß

$$\operatorname*{Limes}_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ist; somit muß offenbar auch der reziproke Wert $\frac{x}{\sin x}$ den Grenzwert 1 annehmen; d. h. es muß sein

$$\operatorname*{Limes}_{x=0} \frac{x}{\sin x} = 1;$$

daraus erhalten wir als zweite Bedingung:

$$a_1 = 1.$$

Wenn also eine Arcus-Sinus-Reihe möglich ist, so hat sie die Form:

$$\operatorname{arc} \sin z = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

Frage 250. Lassen sich in

$$\operatorname{arc} \sin z = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

den Koeffizienten a_2, a_3, a_4 u. s. w. solche Werte beilegen, daß die Gleichung eine identische wird?

Antwort. Es ist klar, daß unsere Gleichung für jeden Wert der unabhängigen Veränderlichen innerhalb des Konvergenzgebietes stimmen muß; wählen wir also innerhalb des letzteren außer z noch einen zweiten Wert z_1, der die Bogenlänge x_1 liefert, so muß sein:

$$x = \operatorname{arc} \sin z = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 a_4 z^4 + \cdots$$

$$x_1 = \operatorname{arc} \sin z_1 = z_1 + a_2 z_1{}^2 + a_3 z_1{}^3 + a_4 z_1{}^4 + \cdots$$

Daraus bilden wir:

$$\frac{x - x_1}{z - z_1} = \frac{\operatorname{arc} \sin z - \operatorname{arc} \sin z_1}{z - z_1} = 1 + a_1 \cdot \frac{z^2 - z_1{}^2}{z - z_1} + a_3 \cdot \frac{z^3 - z_1{}^3}{z - z_1} + \cdots$$

Lassen wir jetzt hier z_1 in z übergehen, so wird rechts nach Seite 327

$$\operatorname*{Limes}_{z_1 = z} \frac{z^2 - z_1{}^2}{z - z_1} = 2z; \quad \operatorname*{Limes}_{z_1 = z} \frac{z^3 - z_1{}^3}{z - z_1} = 3z^2 \quad \text{usw.}$$

womit die rechte Seite der Gleichung die Form gewinnt:

$$1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + 5a_5 z^4 + \cdots$$

Die linke Seite der Gleichung, nämlich $\frac{x - x_1}{z - z_1}$ tritt unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; nun ist aber

$$\frac{x - x_1}{z - z_1} = \frac{x - x_1}{\sin x - \sin x_1} = 1 : \frac{\sin x - \sin x_1}{x - x_1};$$

also muß auch sein:

$$\underset{z_1 = z}{\text{Limes}} \frac{x - x_1}{z - z_1} = \underset{x_1 = x}{\text{Limes}} \left\{1 : \frac{\sin x - \sin x_1}{x - x_1}\right\} = \frac{1}{\underset{x_1 = x}{\text{Limes}} \frac{\sin x - \sin x_1}{x - x_1}} = \frac{1}{\cos x},$$

denn nach Seite 326 wird:

$$\underset{x_1 = x}{\text{Limes}} \frac{\sin x - \sin x_1}{x - x_1} = \cos x.$$

Da aber $\sin x = z$ ist, so ist $\cos x = \sqrt{1 - z^2}$ und

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} = (1 - z^2)^{-1/2}.$$

Hiemit haben wir auch den Grenzwert der linken Seite der Gleichung gewonnen; setzen wir ihn gleich jenem der rechten Seite, so folgt:

$$(1 - z^2)^{-1/2} = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + 5a_5 z^4 + \cdots$$

Entwickeln wir das Binom $(1 - z^2)^{-1/2}$ nach dem binomischen Lehrsatz (s. Aufg. 380) so erhalten wir:

$$(1 - z^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot z^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} z^8 + \cdots$$

Erkl. 188. Es ist klar, daß die Arcus-Sinus-Reihe nur den Bogen x im ersten Quadranten, also zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, liefert, dessen Sinus den Wert z hat.

Sollen hier die beiden rechten Seiten übereinstimmen, so müssen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von z gleich sein Diese Gleichsetzung liefert $a_2 = 0$, $a_4 = 0$, $a_6 = 0$ usw.; ferner:

$$3a_3 = \frac{1}{2}, \text{ also } a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$5a_5 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \quad " \quad a_5 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5}$$

$$7a_7 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \quad " \quad a_7 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7}$$

usw.

Hiemit erhalten wir die Arcus-Sinus-Reihe:

$$22)\quad \arcsin z = z + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7} + \cdots \quad \text{№ } 101$$

oder

$$22\text{a})\quad \arcsin z = z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}z^5 + \frac{5}{112}z^7 + \frac{35}{1152}z^9 + \frac{63}{2816}z^{11} + \cdots \quad \text{№ } 102$$

Dieselbe konvergiert nach den Aufgaben No. 318 und No. 320 für jeden Wert von z zwischen -1 und $+1$ mit Einschluß der beiden Grenzen.

Frage 251. Wie läßt sich zeigen, daß die rechte Seite obiger Reihe noch mit $\arcsin z$ identisch ist, wenn $z = +1$ oder $z = -1$ angenommen wird?

Antwort. Diese Frage hat hier Berechtigung, weil wir in der Ableitung der Formel bei der Entwicklung von $(1-z^2)^{-1/2}$ den Wert von $z^2 < 1$ angenommen haben; wenn wir die Reihe nun auch für $z^2 = 1$ gebrauchen wollen, so muß der Nachweis erbracht werden; daß sie auch für $z = +1$ und $z = -1$ richtig ist.

Die trigonometrische Formel

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

gibt, wenn $\sin x = z$ gesetzt wird, $\cos x = \sqrt{1-z^2}$; hiemit erhalten wir:

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}};$$

daraus folgt durch Umkehrung:

$$\frac{x}{2} = \arcsin\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}$$

oder wegen $x = \arcsin z$:

$$\frac{1}{2}\arcsin z = \arcsin\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}$$

Geht z von 0 bis $+1$ oder -1, so wächst der Wurzelausdruck

von 0 an nur bis $\sqrt{\frac{1}{2}}$; wenn unsere Reihe 22 überhaupt richtig ist, so muß auch für $z = +1$ und für $z = -1$ sein:

$$\arcsin\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}} + \frac{1}{6}\left\{\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}\right\}^3$$
$$+\frac{3}{40}\left\{\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}\right\}^5 + \cdots$$

Um die rechte Seite auszurechnen, setzen wir:

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}\right\} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{16}z^3 + \frac{7}{256}z^5 + \frac{231}{14336}z^7 + \cdots$$

(Siehe Aufgaben No. 377, No. 378 und No. 405).

Dies liefert uns:

$$\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}\right)^3 = \frac{z^3}{8} + \frac{3}{64}z^5 + \cdots$$

und

$$\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}\right)^5 = \frac{z^5}{32} + \cdots;$$

daraus erhalten wir jetzt:

$$\arcsin\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{16}z^3 + \frac{7}{256}z^5 + \cdots$$
$$+\frac{1}{6}\left(\frac{z^3}{8} + \frac{3}{64}z^5 + \cdots\right)$$
$$+\frac{3}{40}\left(\frac{z^5}{32} + \cdots\cdots\right)$$
$$+\cdots$$
$$= \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^3 + \frac{3}{80}z^5 + \cdots$$

Erkl. 189. Setzt man:
$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right\} = s,$$
so folgt durch Quadrierung:
$$\frac{1}{4}\left\{1+a-2\sqrt{(1+a)(1-a)}+1-a\right\} = s^2$$
oder vereinfacht: $\frac{1}{4}\left\{2-2\sqrt{1-a^2}\right\} = s^2$;
hienach ist umgekehrt:
$$s = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}}; \text{ daraus folgt:}$$
$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+a}\right\}$$
also auch:
$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}\right\}$$

Somit wird durch Verdoppelung:

$$\operatorname{arc}\sin z = z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}z^5 + \cdots$$

Diese Reihe stimmt aber mit No. 22a vollständig überein. Wir schließen daraus jetzt auf ihre Giltigkeit für jedes z, falls

$$-1 \leqq z \leqq +1 \text{ ist.}$$

Aufgabe 485. Es soll $\operatorname{arc}\sin 1$ berechnet werden.

Auflösung. Aus der Formel No. 22 folgt für $z = 1$:

$$\operatorname{arc}\sin 1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots$$

Weil aber andrerseits $\operatorname{arc}\sin 1 = \frac{\pi}{2}$ ist, so haben wir auch:

23) $$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots \text{ oder}$$

23a) $$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152} + \frac{63}{2816} + \cdots$$

Diese Reihe ist zur Berechnung von π wenig geeignet, weil ihre Glieder zu langsam abnehmen und deshalb sehr viele derselben zu berechnen wären, wenn die Zahl π auf eine größere Anzahl von Dezimalen genau gefunden werden sollte.

Aufgabe 486. Es soll $\operatorname{arc}\sin\frac{1}{2}$ berechnet werden.

Auflösung. Unsere Formel liefert für $z = \frac{1}{2}$:

$$\operatorname{arc}\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7}$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9\cdot 2^9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \cdots$$

oder

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \frac{35}{589824} + \frac{63}{5767168} + \cdots$$

Erkl. 190. Da $\cos x$ als kleinster Wert -1 und als größter Wert $+1$ hat, so kann die unabhängige Veränderliche u in $x = \operatorname{arc} \cos u$ sich nur zwischen -1 und $+1$ bewegen. Wegen $\cos(x + 2n\pi) = \cos x$, wo n eine ganze Zahl vorstellt, gehören zum gleichen Wert u unendlich viele Bogen x, $x + 2\pi$, $x + 4\pi$ usw., für welche

$$\cos x = u,$$
$$\cos(x + 2\pi) = u,$$
$$\cos(x + 4\pi) = u$$
$$\cos(x - 2\pi) = u \text{ usw. ist.}$$

Der Leser wird gebeten, diese Eigenschaft der Funktion durch eine Zeichnung analog der von Frage 247 darzustellen.

Nun gibt die Ausrechnung:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$
$$\frac{1}{48} = 0{,}0208333$$
$$\frac{3}{1280} = 0{,}0023438$$
$$\frac{5}{14336} = 0{,}0003488$$
$$\frac{35}{589824} = 0{,}0000593$$
$$\frac{63}{5767168} = 0{,}0000106$$
$$\frac{\pi}{6} = 0{,}5235961;$$

daraus folgt jetzt $\pi = 3{,}1415766$.

Man sieht daß dieses Ergebnis nur auf 4 Dezimalen richtig ist; die Arcus-Sinus-Reihe konvergiert sehr schwach: wollte man aus ihr π noch genauer erhalten, so müßten noch weitere Glieder berechnet werden.

Frage 252. Welche Reihe erhält man für $\operatorname{arc} \cos u$?

Erkl. 191. Die Arcus-Cosinus-Reihe liefert nur denjenigen Bogen x im ersten Quadranten, also zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, für welchen $\cos x$ den Wert u hat.

Antwort. Ist

$$x = \operatorname{arc} \cos u \text{ und } y = \operatorname{arc} \sin u,$$

so muß sein:

$$\cos x = u \text{ und}$$
$$\sin y = u \text{ oder } \cos x = \sin y;$$

dies ist aber nur möglich, wenn

$$x + y = \frac{\pi}{2},$$

oder

$$\operatorname{arc} \cos u + \operatorname{arc} \sin u = \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{arc} \cos u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin u \quad \text{№ } 103$$

Entwickeln wir jetzt $\operatorname{arc} \sin u$ nach der Reihe No. 22, so erhalten wir:

$$\arc\cos u = \frac{\pi}{2} - u - \frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{u^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{u^7}{7} - \cdots \quad \text{№ } 104$$

für alle Werie von u zwischen -1 und $+1$ mit Einschluß der Grenzen.

3. Entwicklung der unendlichen Reihen für Arcus-Tangens und Arcus-Cotangens. Genaue Berechnung der Zahl π.

Frage 253. Welchen Grenzwert erreicht der Bruch

$$\frac{\arc \operatorname{tg} \nu}{\nu} \text{ für } \nu = 0?$$

Erkl. 192. Nach Formel No. 4 Seite 324 ist allgemein:

$$x < \operatorname{tg} x, \text{ also } \frac{x}{\operatorname{tg} x} < 1 \text{ oder } \frac{\arc \operatorname{tg} \nu}{\nu} < 1$$

Nehmen wir

$$\nu = 0{,}0174551,$$

so wird

$$\arc \operatorname{tg} \nu = 0{,}0174533 = (\arc 1^0),$$

somit

$$\frac{\arc \operatorname{tg} \nu}{\nu} = \frac{0{,}0174533}{0{,}0173551} = 0{,}99990$$

Für noch kleinere Werte von ν wächst der Wert des Bruches, um für $\nu = 0$ die Grenze 1 zu erreichen.

Antwort. Bezeichnen wir $\arc \operatorname{tg} \nu$ mit x, so muß sein $\operatorname{tg} x = \nu$. Daraus folgt:

$$\frac{\arc \operatorname{tg} \nu}{\nu} = \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{x}{\sin x}\cdot \cos x.$$

Für $\nu = 0$ wird auch $x = 0$; somit ist:

$$\operatorname*{Limes}_{\nu=0} \frac{\arc \operatorname{tg} \nu}{\nu} = \operatorname*{Limes}_{x=0} \left\{\frac{x}{\sin x}\cdot \cos x\right\}$$

Aber nach Seite 325 ist

$$\operatorname*{Limes}_{x=0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

und $\cos x$ geht über in $\cos 0$ und erreicht dann auch den Wert 1; hiernach erhalten wir:

$$\operatorname*{Limes}_{v=0} \frac{\arc \operatorname{tg} v}{v} = 1 \cdots \quad \text{№ } 105$$

Frage 254. Welchen Grenzwert erreicht der Bruch

$$\frac{\arc \operatorname{tg} \nu - \arc \operatorname{tg} \nu_1}{\nu - \nu_1} \text{ für } \nu_1 = \nu?$$

Antwort. Gehören die Tangentenwerte ν und ν_1 zu den Bogen x und x_1, so daß $\operatorname{tg} x = \nu$ und $\operatorname{tg} x_1 = \nu_1$ ist, so folgt:

$$\frac{\arc \operatorname{tg} \nu - \arc \operatorname{tg} \nu_1}{\nu - \nu_1} = \frac{x - x_1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_1} = \frac{x - x_1}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1}} = \frac{(x - x_1)\cos x \cdot \cos x_1}{\sin x \cos x_1 - \cos x \sin x_1}$$

$$= \frac{(x - x_1)\cos x \cdot \cos x_1}{\sin (x - x_1)}$$

Hieraus folgt, weil für $v_1 = v$ auch $x_1 = x$ wird:

$$\underset{v_1 = v}{\text{Limes}} \frac{\operatorname{arc\,tg} v - \operatorname{arc\,tg} v_1}{v - v_1} = \underset{x_1 = x}{\text{Limes}} \left\{ \frac{x - x_1}{\sin(x - x_1)} \cdot \cos x \cos x_1 \right\}$$

Nun haben wir aber nach

$$\underset{x_1 = x}{\text{Limes}} \frac{x - x_1}{\sin(x - x_1)} = 1;$$

woraus folgt:

$$\underset{v_1 = v}{\text{Limes}} \frac{\operatorname{arc\,tg} v - \operatorname{arc\,tg} v_1}{v - v_1} = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{v^2 + 1}$$

Hiernach haben wir

$$\underset{v_1 = v}{\text{Limes}} \frac{\operatorname{arc\,tg} v - \operatorname{arc\,tg} v_1}{v - v_1} = \frac{1}{v^2 + 1} \qquad \text{№ } 106$$

Frage 255. Wenn es gelingen sollte, $\operatorname{arc\,tg} v$ in eine konvergente Potenzreihe zu entwickeln, so muß letztere welchen Bedingungen genügen?

Erkl. 198. Durchläuft in $v = \operatorname{tg} x$ der Bogen x alle Werte von $-\frac{\pi}{2}$ über 0 bis $+\frac{\pi}{2}$, so bewegt sich der Wert v von $-\infty$ über 0 bis $+\infty$; daraus folgt, daß in $x = \operatorname{arc\,tg} v$ die unabhängige Veränderliche v alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann. Aus $\operatorname{tg}(x + n\pi)$ wo n eine ganze Zahl vorstellt, ergibt sich, daß dem gleichen Tangentenwert v unendlich viele Bogen x, $x + \pi$, $x + 2\pi$, $x + 4\pi x$, $-\pi$ usw. entsprechen. Wie läßt sich dies durch eine Zeichnung darstellen? Siehe die zu Erkl. 195 gehörige Figur.

Antwort. Wir wollen annehmen, es sei:

$$\operatorname{arc\,tg} v = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \cdots$$

Weil der Tangente $v = 0$ der Bogen 0 entspricht, so muß notwendig $a_0 = 0$ sein.

Aus

$$\operatorname{arc\,tg} v = a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \cdots$$

folgt jetzt

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} v}{v} = a_1 + a_2 v + a_3 v^2 + \cdots$$

Wird hier $v = 0$ angenommen, so erhalten wir

$$\underset{v = 0}{\text{Limes}} \frac{\operatorname{arc\,tg} v}{v} = a_1;$$

nach Formel No. 105 ist aber dieser Grenzwert $= 1$; hieraus erhalten wir also auch $a_1 = 1$ und für unsere Arcus-Tangens-Reihe die Form:

$$\operatorname{arc\,tg} v = v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + a_4 v^4 + \cdots$$

Ferner ist zu beachten, daß wenn $\operatorname{tg} x = \nu$ ist, dann $\operatorname{tg}(-x) = -\nu$ sein muß, d. h. wir haben

$$\operatorname{arc\,tg}(-\nu) = -\operatorname{arc\,tg}\nu$$

Daraus folgt die Bedingung:

$$-\operatorname{arc\,tg}\nu = -\nu + a_2(-\nu)^2 + a_3(-\nu)^3 + a_4(-\nu)^4 + \cdots$$

oder

$$-\operatorname{arc\,tg}\nu = -\nu + a_2\nu^2 - a_3\nu^3 + a_4\nu^4 - a_5\nu^5 + \cdots,$$

was nur möglich ist, wenn die Koeffizienten a_2, a_4, $a_6 \cdots$ der geraden Potenzen von ν den Wert null haben.

Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse zeigt, daß unsere Reihe nur folgende Form haben kann:

$$\operatorname{arc\,tg}\nu = \nu + a_3\nu^3 + a_5\nu^5 + a_7\nu^7 + \cdots$$

Frage 256. Wie lassen sich jetzt in

$$\operatorname{arc\,tg}\nu = \nu + a_3\nu^3 + a_5\nu^5 + \cdots$$

die Koeffizienten a_3, a_5 usw. bestimmen?

Antwort. Für die beiden Tangentenwerte ν und ν_1 muß sein:

$$\operatorname{arc\,tg}\nu = \nu + a_3\nu^3 + a_5\nu^5 + a_7\nu^7 + \cdots$$

und

$$\operatorname{arc\,tg}\nu_1 = \nu_1 + a_3\nu_1^3 + a_5\nu_1^5 + a_7\nu_1^7 + \cdots$$

Daraus bilden wir:

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}\nu - \operatorname{arc\,tg}\nu_1}{\nu - \nu_1} = 1 + a_3\cdot\frac{\nu^3 - \nu_1^3}{\nu - \nu_1} + a_5\cdot\frac{\nu^5 - \nu_1^5}{\nu - \nu_1} + \cdots$$

Lassen wir den Wert ν_1 in jenen von ν übergehen, so geben die Formeln 106 und 93:

$$\frac{1}{1+\nu^2} = 1 + 3a_3\nu^2 + 5a_5\nu^4 + 7a_7\nu^6 + \cdots.$$

Da aber nach Aufgabe 372:

$$\frac{1}{1+\nu^2} = 1 - \nu^2 + \nu^4 - \nu^6 + \nu^8 - \cdots$$

ist, so liefert die Koeffizientenvergleichung:

$$a_3 = -\frac{1}{3};\ a_5 = \frac{1}{5};\ a_7 = -\frac{1}{7} \text{ usw.}$$

Hiedurch erhalten wir als Arcus-Tangens-Reihe:

$$\text{arc tg}\, v = v - \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} - \frac{v^7}{7} + \frac{v^9}{9} + \cdots \quad \text{№ } 107$$

Frage 257. Wie verhält es sich mit der Konvergenz der Arcus-Tangens-Reihe?

Antwort. Setzen wir in

$$u_1 = v,\quad u_2 = \frac{v^3}{3},\quad u_3 = \frac{v^5}{5},\quad u_4 = \frac{v^7}{7}$$

usw., also allgemein:

$$u_n = \frac{v^{2n-1}}{2n-1} \text{ und } u_{n+1} = \frac{v^{2n+1}}{2n+1},$$

so wird:

$$\text{arc tg}\, v = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

Nach der Frage 175 konvergiert die Reihe, falls dies zutrifft bei der Reihe:

$$s_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

In dieser wird:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot v^2,$$

somit

$$\operatorname*{Limes}_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \operatorname*{Limes}_{n=\infty} \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}} \cdot v_2 = v^2;$$

somit konvergiert nach Frage 171 diese Reihe, wenn $v^2 < 1$ ist; die Arcus-Tangens-Reihe konvergiert hienach auch für alle Werte von v zwischen -1 und $+1$.

Für $v = +1$ erhalten wir:

$$\text{arc tg}\, 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

also eine Reihe aus Gliedern mit abwechselndem Vorzeichen, deren Werte mit wachsendem Stellenzeiger abnehmen und sich der Grenze Null als Grenze fortwährend nähern. Nach Frage 178 konvergiert auch diese Reihe. Das

Gleiche gilt für die aus $\nu = -1$ hervorgehende Reihe. Daraus folgt: Die Arcus-Tangens-Reihe No. 107 konvergiert für

$$-1 \leqq \nu \leqq +1.$$

Frage 258. Wie kann man zu einer Reihe für $\operatorname{arc\,tg} \nu$ gelangen, wenn $\nu > 1$ ist?

Erkl. 194. Nehmen wir $\nu = \sqrt{3}$, so ist $x = \frac{\pi}{3}$, denn $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

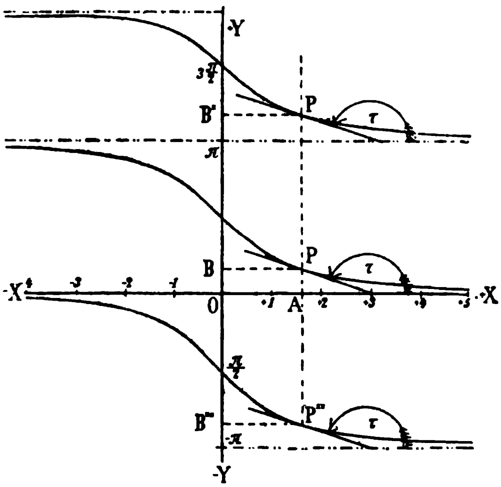
Nun ist $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ oder

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

also $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3}$;

Daraus ergibt sich:

$$\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Antwort. Wenn $\operatorname{tg} x = \nu$ einen Wert größer als 1 besitzt, so muß der Winkel $x > 45^0$ oder im Bogenmaß $> \frac{\pi}{4}$ sein. Dann ist der zugehörige Komplementwinkel $\frac{\pi}{2} - x$ kleiner als $\frac{\pi}{4}$, und dessen Tangente kleiner als 1 ist. Nach der Trigonometrie hat man nun:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\nu}.$$

Durch Umkehrung folgt:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\nu} = \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \nu;$$

hienach muß sein:

$$\mathbf{arc\,tg}\, v = \frac{\pi}{2} - \mathbf{arc\,tg} \frac{1}{v} \quad \text{.. No. 108.}$$

Weil $\frac{1}{\nu}$ den Wert 1 nicht erreicht, so dürfen wir $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\nu}$ nach der obigen Arcus-Tangens-Reihe No. 107 entwickeln; dadurch erhalten wir jetzt für $\nu > 1$:

$$\mathbf{arc\,tg}\, v = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{v} + \frac{1}{3v^3} - \frac{1}{5v^5} + \frac{1}{7v^7} - \cdots \quad \text{№ 109.}$$

Frage 259. Wie lassen sich die Reihen für $\operatorname{arc\,cotg} w$ gewinnen?

Erkl. 195. Durchläuft in $w = \operatorname{cotg} x$ der Bogen x alle Werte von 0 bis π, so geht der Wert von w von $+\infty$ über 0 nach $-\infty$, daraus ergibt sich, daß in $x = \operatorname{arc\,cotg} w$ die unabhängige Veränderliche w alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann. Aus $\operatorname{cotg}(x + n\pi) = \operatorname{cotg} x$,

Antwort. Aus $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = w$ folgt durch Umkehrung:

$$\operatorname{arc\,cotg} w = x \quad \text{und}$$

$$\operatorname{arc\,tg} w = \frac{\pi}{2} - x;$$

wo n wieder eine ganze Zahl vorstellt, folgt, daß dem **gleichen** Kotangenwert w unendlich viele Bogen x, $x+\pi$, $x+2\pi$ usw. entsprechen. S. obige Zeichnung.

Erkl. 196. Nehmen wir

$w = 0{,}364$, so ist $x = 70^0$; denn

ctg $70^0 = 0{,}364$; ebenso groß ist tg 20^0; also:

$\text{arc ctg } 0{,}364 = 70^0$; $\text{arc tg } 0{,}364 = 20^0$;

daher

$$\text{arc cotg } 0{,}364 + \text{arc tg } 0{,}364 = 90^0 \left(= \frac{\pi}{2}\right),$$

somit muß sein:

$$\text{arc ctg } 0{,}364 = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } 0{,}364.$$

somit ist:

$$\textbf{arc cotg } w = \frac{\pi}{2} - \textbf{arc tg } w \,.\,. \quad \text{№ } 110$$

Ist der absolute Wert von w kleiner als die Einheit, so setzen wir für arc tg w nach der Formel No. 107:

$$\text{arc tg } w = w - \frac{1}{3}w^3 + \frac{1}{5}w^5 - \frac{1}{7}w^7 - \cdots$$

und erhalten damit:

$$\textbf{arc cotg } w = \frac{\pi}{2} - w + \frac{1}{3}w^3 - \frac{1}{5}w^5 + \frac{1}{7}w^7 \cdots$$

$$\textbf{für } -1 \leqq w \leqq +1 \,.\,.\,.\,.\,. \quad \text{№ } 111.$$

Übersteigt dagegen der absolute Wert von w die Einheit, so benützen wir zur Entwicklung von arc tg w die Formel No. 109 und erhalten damit:

$$\textbf{arc cotg } w = \frac{1}{w} - \frac{1}{3w^3} + \frac{1}{5w^5} - \frac{1}{7w^7} + \cdots.$$

$$\textbf{für } w > 1 \textbf{ und } w < -1 \,.\,. \quad \text{№ } 112$$

Aufgabe 487. Berechne arc tg 1.

Erkl. 197. Leibniz, deutscher Philosoph und Mathematiker, lebte 1646—1716.

Auflösung. Da arc tg $1 = \frac{\pi}{4}$ ist, so folgt aus der Arcus-Tangens-Reihe No. 107 für $w = 1$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \quad \text{№ } 113$$

Diese Reihe heißt die **Leibniz'sche Reihe**. Weil dieselbe nur schwach konvergiert, so eignet sie sich nicht zur Berechnung der Zahl π.

Aufgabe 488. Aus der Leibniz'schen Reihe soll eine stärker konvergierende gewonnen werden.

Auflösung. Aus der obigen Reihe bilden wir:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \cdots$$

$$= \frac{3-2}{1\cdot 3} + \frac{7-5}{5\cdot 7} + \frac{11-9}{9\cdot 11} + \cdots$$

$$= \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{5\cdot 7} + \frac{2}{9\cdot 11} + \cdots$$

Heft 1552	Preis des Heftes 25 Pfg.	Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Heft 23

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Daraus folgt jetzt:

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} + \cdots \quad \text{№ } 114$$

Aufgabe 489. Berechne den Wert von x in $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Erkl. 198. Der franz. Mathematiker Lagny berechnete 1719 mit der nebenstehenden Reihe die Zahl π auf 127 Dezimalen.

Auflösung. Da $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, haben wir hier $v = \frac{1}{\sqrt{3}}$ u. $x = \frac{\pi}{6}$; ferner liefert die Arcus-Tangens-Reihe No. 107 für

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}:$$

$$x = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^7 + \cdots$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3^3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3^4} + \cdots$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3}\left\{1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right\}$$

Daraus ergibt sich jetzt weiter:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left\{1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \cdots\right\} \quad \text{№ } 115$$

Diese Reihe heißt die Lagny'sche Reihe.

Aufgabe 490. Beweise, daß

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} \text{ ist.}$$

Auflösung. Setzen wir

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \text{ oder } x = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{1}{3} \text{ oder } x_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3},$$

so wird

$$\operatorname{tg}(x + x_1) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x_1}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x_1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{5}{5} = 1.$$

Dies gibt

$$\text{arc tg}\,1 = x + x_1 = \text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{3};$$

da aber auch

$$\text{arc tg}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

sein muß, so ist

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{3} \quad \text{№ } 116.$$

Aufgabe 491. Es soll mittelst der vorigen Formel eine neue Reihe für π abgeleitet werden.

Auflösung. Nach der Arcus-Tangens-Reihe No. 107 erhalten wir für $v = \frac{1}{2}$, bez. $\frac{1}{3}$:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \cdots\right)$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \cdots \quad \text{№ } 117$$

Diese Reihe heißt die **Reihe von Euler**.

Aufgabe 492. Beweise, daß

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{arc tg}\,\frac{1}{5} - \text{arc tg}\,\frac{1}{239}$$

ist.

Auflösung. Aus

$$\text{tg}\,x = \frac{1}{5}; \text{ folgt } x = \text{arc tg}\,\frac{1}{5}$$

Ferner:

$$\text{tg}\,2x = \frac{2\,\text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2 x} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

und

$$\text{tg}\,4x = \frac{2\,\text{tg}\,2x}{1 - \text{tg}^2 2x} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

Hieraus ersehen wir, daß

$$\operatorname{tg} 4x > 1 \text{ und } 4x > \frac{\pi}{4} \text{ ist;}$$

der Unterschied zwischen $4x$ und $\frac{\pi}{4}$ kann aber nicht groß sein; bezeichnen wir denselben mit d, so wird

$$4x = \frac{\pi}{4} + d \text{ und } 4x - d = \frac{\pi}{4}$$

und

$$d = 4x - \frac{\pi}{4};$$

deshalb muß sein:

$$\operatorname{tg} d = \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4x \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119} \cdot 1} = \frac{1}{239};$$

daher hat man

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = d \text{ und wegen } 4x - d = \frac{\pi}{4}:$$

$$\mathbf{4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}} \qquad \text{№ } 118$$

Aufgabe 493. Mittelst der vorigen Formel soll eine weitere Reihe für π gefunden werden.

Erkl. 199. Machin, ein englischer Mathematiker benutzte 1706 die nebenstehende Reihe zur Berechnung von π auf 100 Dezimalen.

Auflösung. Nach der Arcus-Tangens-Reihe No. 107 erhalten wir für

$$v = \frac{1}{5}, \text{ bez. } \frac{1}{239}$$

sofort:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right)$$

$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right) \qquad \text{№ } 119$$

Diese Reihe heißt die Reihe von Machin.

Aufgabe 494. Bereche π mittelst der Machin'schen Reihe auf 8 Dezimalen.

Erkl. 200.

$$\frac{1}{5} = 0{,}2000000000$$
$$\frac{1}{5 \cdot 5^5} = 0{,}0000640000$$
$$\frac{1}{9 \cdot 5^9} = 0{,}0000000569$$
$$\frac{1}{13 \cdot 5^{13}} = 0{,}0000000001$$
$$\overline{0{,}2000640570}$$
$$-0{,}0026684972$$
$$\overline{0{,}1973955598} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}.$$

Erkl. 201. Die Irrationalität der Zahl π hat der deutsche Mathematiker Lindemann im Jahre 1872 nachgewiesen.

Erkl. 202. Die wichtigsten Reihen der 4 letzten Abschnitte stammen aus den Jahren 1668—1676 von Mercator, Newton, Gregory, Leibntz und Euler. Siehe Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1899.

Auflösung.

$$-\frac{1}{3 \cdot 5^3} = -0{,}0026666667$$
$$-\frac{1}{7 \cdot 5^7} = -0{,}0000018286$$
$$-\frac{1}{11 \cdot 5^{11}} = -0{,}0000000019$$
$$\overline{-0{,}0026684972}$$

Weiter erhalten wir:

$$\frac{1}{239} = 0{,}0041841004$$
$$-\frac{1}{3 \cdot 239^2} = -0{,}0000000244$$
$$\overline{0{,}0041840760} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{289}$$

Somit folgt

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$$
$$= 0{,}7895822392$$
$$-\,0{,}0041840760$$
$$\overline{= 0{,}7853981632}$$

und daraus

$$\pi = 3{,}14159265 \quad \text{№ } 120$$

---

4. Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 495. Beweise, daß
$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{5} = \frac{\pi}{4} \text{ ist.}$$

Aufgabe 496. Ebenso daß für echt gebrochenen Werte von a u. b
$$\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg} \frac{a+b}{1-ab}$$

Aufgabe 497. Ebenso, daß für ein echt gebrochenes a und für
$$b = \frac{1-a}{1+a}$$
$$\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} b = \frac{\pi}{4}$$
ist.

Aufgabe 498. Beweise, daß

$$\frac{\pi}{4} = \left(a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 - \cdots\right)$$
$$+ \left\{\frac{1-a}{1+a} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^3\right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^5 + \cdots\right\} \text{ ist.}$$

Aufgabe 499. Beweise, daß

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4} \text{ ist.}$$

Aufgabe 500. Beweise, daß

$$3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{13} = \frac{\pi}{4} \text{ ist.}$$

Aufgabe 501. Beweise, daß

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

ist.

Aufgabe 502. Leite aus jeder dieser Gleichungen eine Reihe für $\frac{\pi}{4}$ ab.

XII. Formelverzeichnis.

I. Binomischer Lehrsatz.

Formel 1.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$
$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$
$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$ Seite 2.

Formel 2.

$$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$$
$$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$1+4+10+20+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$
$$1+5+15+35+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$ usw. Seite 12.

Formel 3. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n.$ Seite 18.

Formel 4. $\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r}.$ Seite 24.

Formel 5. $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r}=\binom{n}{r}$ Seite 24 und Seite 263.

Formel 6. $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$ Seite 24.

Formel 7. $\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}$ Seite 25.

Formel 8. $(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\cdots$

$+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n$ Seite 31.

Formel 9. $(a-b)^n=a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots$

$+(-1)^r\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\cdots+(-1)^n b^n.$ Seite 32.

Hier bedeuten n und r ganze positive Zahlen.

II. Polynomischer Lehrsatz.

Formel 10. Für $P=a+b+c+d+\cdots$ wird

$P^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab$, wobei $\Sigma a^2=a^2+b^2+c^2+d^2+\cdots$

$2\Sigma ab=2(ab+ac+ad+\cdots+bc+bd+\cdots+cd+\cdots)$ Seite 46.

Formel 11. $P^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc$, wobei

$\Sigma a^3=a^3+b^3+c^3+d^3+\cdots$

$3\Sigma a^2b=3(a^2b+a^2c+\cdots+b^2c+b^2d+\cdots+c^2d+\cdots)$

$6\Sigma abc=6(abc+abd+\cdots+bcd+\cdots)$ Seite 47.

Formel 12. $P^4=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc+24\Sigma abcd.$ S. 48.

Formel 13. $P^5=\Sigma a^5+5\Sigma a^4b+10\Sigma a^3b^2+20\Sigma a^3bc+30\Sigma a^2b^2c$

$+60\Sigma a^2bcd+120\Sigma abcde.$ Seite 48.

Formel 14. $P^n=\Sigma\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon\ldots$, wobei

$\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots n$

$\beta=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots n$

. . . .

$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\cdots=n.$ Seite 53.

III. Allgemeine arithmetische Reihen.

a) Reihen I. Ordnung.

Formel 15. $y_n = y_1 + (n-1)\Delta y$. S. 74.

Formel 16. $y_n = an + b$. S. 74.

Formel 17. $s = \frac{y_1 + y_n}{2} \cdot n$. S. 76.

Formel 18. $s = ny_1 + \binom{n}{2}\Delta y$. S. 77.

Formel 19. $s = \alpha n^2 + \beta n$. S. 77.

b) Reihen II. Ordnung.

Formel 20. $\Delta y_{n-1} = \Delta y_1 + (n-2)\Delta^2 y_1$. Seite 83.

Formel 21. $y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1$. Seite 84.

Formel 22. $y_n = an^2 + bn + c$. Seite 85.

Formel 23. $s = ny_1 + \binom{n}{2}\Delta y_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 y_1$. Seite 88.

Formel 24. $s = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n$. Seite 90.

c) Reihen III. Ordnung.

Formel 25. $\Delta^2 y_{n-2} = \Delta^2 y_1 + (n-3)\Delta^3 y_1$. Seite 98.

Formel 26. $\Delta y_{n-1} = \Delta y_1 + (n-2)\Delta^2 y_1 + \binom{n-2}{2}\Delta^3 y_1$. Seite 98.

Formel 27. $y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 y_1$. S. 99.

Formel 28. $y_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Seite 100.

Formel 29. $s = ny_1 + \binom{n}{2}\Delta y_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 y_1 + \binom{n}{4}\Delta^3 y_1$. Seite 103.

Formel 30. $s = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n$. Seite 105.

d) Reihen r^{ter} Ordnung.

Formel 31. $\Delta^m y_1 = y_{m+1} - \binom{m}{1} y_m + \binom{m}{2} y_{m-1} - \binom{m}{3} y_{m-2} + \cdots + (-1)^m y_1$ Seite 109.

Formel 32. $\Delta^m y_n = y_{n+m} - \binom{m}{1} y_{n+m-1} + \binom{m}{2} y_{n+m-2} - \cdots + (-1)^m y_n$ Seite 111.

Formel 33.

$$y_n = y_1 + \binom{n-1}{1}\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 y_1 + \cdots + \binom{n-1}{r}\Delta^r y_1.$$ S. 112.

Formel 34. $y_n = an^r + bn^{r-1} + cn^{r-2} + \cdots + pn + q.$ Seite 113.

Formel 35. $\Delta^r y_n = a \cdot r!$ Seite 116.

Formel 36. $s = ny_1 + \binom{n}{2}\Delta y_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 y_1 + \binom{n}{4}\Delta^3 y_1 + \cdots + \binom{n}{r+1}\Delta^r y_1$ S. 122.

Formel 37. $s = \alpha n^{r+1} + \beta n^r + \gamma n^{r-1} + \delta n^{r-2} + \cdots + \varkappa n.$ Seite 125.

IV. Summenreihen und figurierte Zahlen.

Formel 38. $n^{\underline{\underline{te}}}$ Dreieckszahl $= \binom{n+1}{2}$ Seite 137.

$n^{\underline{\underline{te}}}$ Quadratzahl $= n^2$ Seite 138.

$n^{\underline{\underline{te}}}$ Fünfeckszahl $= \frac{n(3n-1)}{2}$ S. 138.

$n^{\underline{\underline{te}}}$ Sechseckszahl $= n(2n-1)$ S. 138.

$n^{\underline{\underline{tes}}}$ Glied der m eckigen Polygonzahl $= \frac{n}{2}\left\{4 - m + n(m-2)\right\}$ Seite 138.

Formel 39. $n^{\underline{\underline{te}}}$ dreiseitige Pyramidalzahl $= \binom{n+2}{3}$ Seite 139.

$n^{\underline{\underline{te}}}$ vierseitige „ „ $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Seite 140.

$n^{\underline{\underline{te}}}$ fünfseitige „ „ $= \frac{n^2(n+1)}{2}$ Seite 140.

$n^{\underline{\underline{te}}}$ m seitige „ „ $= \frac{n(n+1)}{6}\left\{5 - m + n(m-2)\right\}$ Seite 141.

Formel 40. Summe der n ersten dreiseitigen Pyramidalzahlen $= \binom{n+3}{4}$ S. 145

Summe der n ersten vierseitigen Pyramidalzahlen $= \frac{1}{12}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{8}{12}n^2 + \frac{1}{6}n$ Seite 145.

Summe der n ersten fünfseitigen Pyramidalzahlen $= \frac{1}{8}n^4 + \frac{5}{12}n^3 + \frac{3}{8}n^2 + \frac{1}{12}n$ Seite 146.

Summe der n ersten m seitigen Pyramidalzahlen $= \frac{m-2}{24}n^4 + \frac{m}{12}n^3 + \frac{14-m}{24}n^2 + \frac{6-m}{12} \cdot n$ Seite 147.

Formel 41. $n^{\underline{\underline{te}}}$ figurierte Zahl der $1^{\underline{\underline{ten}}}$ Ordnung $= n$

„ „ „ „ $2^{\underline{\underline{ten}}}$ „ $= \binom{n+1}{2}$

„ „ „ „ $3^{\underline{\underline{ten}}}$ „ $= \binom{n+2}{3}$

„ „ „ „ $4^{\underline{\underline{ten}}}$ „ $= \binom{n+3}{4}$

„ „ „ „ $k^{\underline{\underline{ten}}}$ „ $= \binom{n+k-1}{k}$. S. 153

V. Interpolation.

Formel 42. Interpolationsformel von Newton:

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 y_1 + \cdots + \binom{n-1}{r}\Delta^r y_1$$

Seite 162.

Formel 43. Interpolationsformel von Encke:

$$f(a+nw) = f(a) + \binom{n}{1} f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \binom{n}{2} f^{II}(a) + \binom{n+1}{3} f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$
$$+ \binom{n+1}{4} f^{IV}(a) + \binom{n+2}{5} f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \cdots$$

Seite 172.

Formel 44. Interpolationsformel für die Mitte:

$$f\left(a+\frac{1}{2}w\right) = f(a) + \frac{1}{2} f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} f^{II}(a) - \frac{1}{16} f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{128} f^{IV}(a)$$
$$+ \frac{3}{256} f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{1024} f^{VI}(a) + \cdots$$

Seite 175.

Formel 45. Interpolationsformel von Lagrange: Wenn die Größen x_1, x_2, x_3, x_4 den Größen y_1, y_2, y_3, y_4 entsprechen, so findet man die zu der Größe x gehörige Zahl y durch:

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} y_2$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_3)(x_3-x_4)} y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} y_4.$$

S. 179

VI. Unendliche Reihen.

Formel 46. Sätze über Konvergenz und Divergenz.

1. Wenn in der geometrischen Reihe $a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$ der Quotient q absolut genommen kleiner als 1 ist, so konvergiert die Reihe und die Summe hat den Grenzwert $s = \frac{a}{1-q}$. In allen anderen Fällen divergiert die Reihe. Seite 191.

2. Wenn in der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ von einer angebbaren Stelle an der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ stets um eine endliche Größe kleiner als 1, auch noch für $n = \infty$, so konvergiert die Reihe. S.209
3. Wenn in der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ von einer angebbaren Stelle der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nicht kleiner ist als die Einheit, auch für $n = \infty$, so divergiert die Reihe. Seite 210.
4. Wenn in einer Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ mit nur positiven Gliedern der Wert des Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für $n = \infty$ sich einer Grenze g nähert, welche kleiner als 1 ist, so ist die Reihe konvergent. S.214
5. Wenn dieser Grenzwert g von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für $n = \infty$ größer als 1 ist, so ist die Reihe divergent. Seite 214.
6. Wenn dieser Grenzwert g für $n = \infty$ der Einheit gleich ist, so kann die Reihe konvergieren oder divergieren und es bedarf zur Entscheidung einer weiteren Untersuchnng. Seite 214.
7. Wenn in der zu untersuchenden Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ mit nur positiven Gliedern der Grenzwert des Ausdruckes $n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\}$ größer als 1 ist für $n = \infty$, so ist die Reihe konvergent. S.221.
8. Ist dagegen der Grenzwert des Ausdruckes $n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\}$ kleiner als 1 für $n = \infty$, so ist die Reihe divergent. Seite 221.
9. Wenn $\operatorname*{Limes}_{n=\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} = 1$, so bedarf es weiterer Untersuchungen. Seite 221.
10. Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern konvergiert, wenn die andere Reihe konvergiert, welche dieselben Glieder aber mit lauter positiven Vorzeichen enthält. Seite 226.
11. Eine Reihe mit abwechselnden Vorzeichen konvergiert, wenn das Anfangsglied endlich ist und die Zahlenwerte der Glieder mit wachsendem Stellenzeiger abnehmen und sich der Null als Grenze fortwährend nähern. Seite 230.
12. Sind $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ und $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ zwei konvergente Reihen mit lauter positiven Gliedern, so konvergiert auch die dritte unendliche Reihe $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ mit den Gliedern:

$$\begin{aligned}
w_0 &= u_0 v_0 \\
w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0 \\
w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
w_n &= u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_n v_0
\end{aligned}$$

und ihre Summe S'' ist gleich dem Produkt SS' der beiden gegebenen Reihen. Seite 235.

13. Eine Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ konvergiert unbedingt, wenn von einer bestimmten Stelle ab der absolute Wert des Bruches $\frac{a_{n+1}x}{a_n}$ kleiner als 1 ist, d. h. für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als der absolute Wert des Bruches $\frac{a_n}{a_{n+1}}$. Seite 238.

14. Wenn in einer Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ der absolute Wert des Bruckes $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ bei unendlich wachsendem n sich der Grenze λ nähert, so konvergiert die Reihe unbedingt für solche Werte von x, welche zwischen $+\lambda$ und $-\lambda$ liegen. Die Fälle $x = +\lambda$ und $x = -\lambda$ bedürfen noch weiterer Untersuchung. S. 239

VII. Entwicklung der Funktionen in unendliche Reihen.

Formel 47. Für $\frac{A + Bx + Cx^2 + \cdots + Rx^n}{A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \cdots + Q_1 x^m} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

ist

$$a_0 A_1 = A$$
$$a_0 B_1 + a_1 A_1 = B$$
$$a_0 C_1 + a_1 B_1 + a_2 A_1 = C$$
$$a_0 D_1 + a_1 C_1 + a_2 B_1 + a_3 A_1 = D$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Seite 253.

Formel 48. $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots$

für jeden reellen Wert von n und für jedes x zwischen -1 und $+1$. Für $x = +1$ muß $-1 < n < +\infty$ und für $x = -1$ muß $0 < n < +\infty$ sein.

Formel 49. $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots$

für jede reelle Zahl n, wenn $a^2 > b^2$ ist. Seite 270.

Formel 50. $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}x^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}x^4 - \cdots$ S. 273.

Formel 51. $(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}x^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}x^4 - \cdots$ S. 273.

Formel 52. $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^4 - \cdots$ S. 273.

Formel 53. $(1-x)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^4+\cdots$ S. 274.

Formel 54. $(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}x^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{9}x^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{12}x^3+\cdots$ S. 274.

Formel 55. $(1-x)^{1/3}=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}x^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{9}x^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{12}x^4-\cdots$ S. 274.

Formel 56. $(1+x)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}x-\frac{m-1}{2m^2}x^2+\frac{(m-1)(2m-1)}{2\cdot 3\cdot m^3}x^3$

$-\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{2\cdot 3\cdot 4m^4}x^4+\cdots$ Seite 274.

VIII. Die Exponentialreihen.

Formel 57. Die Basis e des natürlichen Logarithmensystems berechnet sich aus: $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$. Seite 284.

Formel 58. $e=2{,}718\ 281\ 828\ 459\ldots$ Seite 284.

Formel 59. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$. Seite 284.

Formel 60. $b^x=1+\frac{x\,l\,b}{1!}+\frac{(x\,l\,b)^2}{2!}+\frac{(x\,l\,b)^3}{3!}+\cdots$ Seite 285.

Formel 61. $b=1+\frac{l\,b}{1!}+\frac{(l\,b)^2}{2!}+\frac{(l\,b)^3}{3!}+\cdots$. Seite 285.

Formel 62. $b^x=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{x\log b}{\log e}+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{x\log b}{\log e}\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{x\log b}{\log e}\right)^3+\cdots$ S. 286.

Formel 63. $\underset{n=\infty}{\text{Limes}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$ Seite 287.

Formel 64. $\underset{n=\infty}{\text{Limes}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$ Seite 287.

Formel 65. $\underset{x=0}{\text{Limes}}\frac{e^x-1}{x}=1.$ Seite 292.

Formel 66. $\underset{x=0}{\text{Limes}}\frac{a^x-b^x}{x}=l\,a-l\,b.$ Seite 292.

IX. Die logarithmischen Reihen.

Formel 67. $log_b(1+x) = M_b\left\{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right\}$ S. 297.

Formel 68. Für den Modul des Logarithmensystems von der Basis b gilt:

$M_b = log_b e.$ Seite 299.

Formel 69. $log_b(1+x) = log_b e\left\{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right\}$ S. 299.

Formel 70. Die logarithmische Reihe:

$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ konvergiert für $-1 < x \leqq +1$. Seite 299.

Formel 71. $l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$ konvergiert für $x < 1$. Seite 300.

Formel 72. $l(1+z) = \frac{1}{1}\cdot\left(\frac{z}{z+1}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{z}{z+1}\right)^3 + \cdots$

für jede positive Zahl z. Seite 301.

Formel 73. $lz = 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{z-1}{z-2} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right\}$

für jede positive Zahl z. Seite 302.

Formel 74. $l(n+z) = ln + 2\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \cdots\right\}$

für jede positive Zahl z. Seite 302.

Formel 75. $l(1+z) = 2\left\{\frac{z}{z+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{z+1}\right)^5 + \cdots\right\}$ S. 302.

Formel 76. $l(z+1) = lz + 2\left\{\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z+1)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2z+1)^5} + \cdots\right\}$ Seite 302.

Formel 77.

$$lz = \frac{1}{2}\cdot\left\{l(z+1) + l(z+1)\right\} + \left\{\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z^2-1)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2z^2-1)^5} + \cdots\right\}$$

Formel 75 u. 76 gelten für jede positive Zahl z; Formel 77 für $z > 1$. S. 303.

Formel 78. $M_b = \frac{1}{l\,b}$, $M_{10} = \frac{1}{l\,10}$ Seite 313.

Formel 79. $log_b z = \frac{lz}{lb}$. Seite 313.

Formel 80. $M_{10} = 0{,}434294481903\ldots$; $log\,M_{10} = 0{,}63778431 - 1$ S. 313.

Formel 81. $log_{10}(1 + x = M_{10}\left\{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots\right\}$ Seite 314.

Formel 82. $log_{10}(1 - x) = -M_{10}\left\{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right\}$ Seite 314.

Formel 83. $log_{10}\frac{1+x}{1-x} = 2M_{10}\left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right\}$ Seite 314.

In Formel 81—83 muß $x < 1$ angenommen werden.

Formel 84. $log_{10}(z+1) = log_{10} z + 2M_{10}\left\{\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z+1)^3} + \cdots\right\}$ S. 314

Formel 85.

$log_{10} = \frac{1}{2}\left\{log(z+1) + log(z-1)\right\} + M_{10}\left\{\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z^2-1)^3} + \cdots\right\}$ S. 314

Formel 86. $log_{10}(n+z) = log\,n + 2M_{10}\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \cdots\right\}$

In Formel 84—86 ist der Wert von z ganz beliebig. S. 314

Formel 87. Für den sehr kleinen Bruch $\frac{d}{n}$ ist

$$log(n+d) - log\,n = M_{10}\cdot\frac{d}{n}$$ Seite 316.

Formel 88. Für eine große Zahl n und kleine Zahlen d und d_1 ist:

$\left\{log(n+d) - log\,n\right\} : \left\{log(n+d_1) - log\,n\right\} = \left\{(n+d) - n\right\} : \left\{(n+d_1) - n\right\}$ S. 316

Formel 89. Für die große Zahl n und den echten Bruch q ist:

$$log(n+q) = log\,n + q\left\{log(n+1) - log\,n\right\}.$$ Seite 316.

X. Die goniometrischen Reihen.

Formel 90. $\underset{x=0}{\text{Limes}}\frac{\sin x}{x} = 1$ Seite 325.

Formel 91. $\underset{x=y}{\text{Limes}}\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos x$. Seite 326.

Formel 92. $\underset{y=x}{\text{Limes}} \dfrac{\cos x - \cos y}{x-y} = -\sin x.$ Seite 327.

Formel 93. $\underset{y=x}{\text{Limes}} \dfrac{x^n - y^n}{x-y} = n x^{n-1}$ Seite 327.

Formel 94. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$ S. 331

Formel 95. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$ S. 331

Formel 94 und 95 konvergieren für jeden beliebigen Wert von x; $-\infty < x < +\infty$.

Formel 96. $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15} x^5 + \dfrac{17}{315} x^7 + \cdots$ Seite 336.

Formel 97. $\operatorname{tg} x = \dfrac{2^2(2^2-1)B_1}{2!} x + \dfrac{2^4(2^4-1)B_3}{4!} x^3 + \dfrac{2^6(2^6-1)B_5}{6!} x_5 + \cdots$

Formel 96 und 97 konvergieren für $-\dfrac{\pi}{2} < x < +\dfrac{\pi}{2}$. S. 336

Formel 98. Bernouillische Zahlen:

$B_1 = \dfrac{1}{6}$; $B_3 = \dfrac{1}{30}$; $B_5 = \dfrac{1}{42}$; $B_7 = \dfrac{1}{30}$; $B_7 = \dfrac{1}{30}$; $B_9 = \dfrac{5}{66}$; $B_{11} = \dfrac{691}{2730}$ usw.

Seite 336.

Formel 99. $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} - \dfrac{2x^5}{945} - \cdots$ Seite 336.

Formel 100. $\operatorname{cotg} x = \dfrac{2^2 B_1}{2!} x - \dfrac{2^4 B_3}{4!} x^3 - \dfrac{2^6 B_5}{5!} x^5 - \cdots$. Seite 336.

Formel 99 und 100 konvergieren für $-\pi < x < +\pi$.

XI. Die cyklometrischen Reihen.

Formel 101. $\arcsin z = z + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \dfrac{z^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} \cdot \dfrac{z^7}{7} + \cdots$ S. 343.

Formel 102. $\arcsin z = z + \dfrac{1}{6} z^3 + \dfrac{3}{40} z^5 + \dfrac{5}{112} z^7 + \dfrac{35}{1152} z^9 + \dfrac{63}{2816} z^{11} + \cdots$ S. 343

Formel 101 und 102 konvergieren für jeden Wert von z zwischen -1 und $+1$ mit Einschluß der beiden Grenzen.

Heft 1557

Preis des Heftes 25 Pfg.

Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthilfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preussischer Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.

Zum Selbststudium und dem Gebrauch an Lehranstalten.

Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. A. Haas.

Heft 24

Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann

Formel 103. $\operatorname{arc}\cos u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin u.$ Seite 346.

Formel 104. $\operatorname{arc}\cos u = \frac{\pi}{2} - u - \frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{u^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{u^7}{7} - \cdots$ Seite 347.

Formel 103 und 104 konvergieren für alle Werte von u zwischen -1 und $+1$ mit Einschluß der Grenzen.

Formel 105. $\underset{v=0}{\text{Limes}} \frac{\operatorname{arc}\operatorname{tg} v}{v} = 1.$ Seite 347.

Formel 106. $\underset{v_1=v}{\text{Limes}} \frac{\operatorname{arc}\operatorname{tg} v - \operatorname{arc}\operatorname{tg} v_1}{v - v_1} = \frac{1}{v^2+1}$ Seite 348.

Formel 107. $\operatorname{arc}\operatorname{tg} v = v - \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} - \frac{v^7}{7} + \frac{v^9}{9} - \cdots$ konvergiert für alle Werte von 0 zwischen -1 und $+1$ mit Einschluß der Grenzen. Seite 350.

Formel 108. $\operatorname{arc}\operatorname{tg} v = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{v}$ Seite 351.

Formel 109. $\operatorname{arc}\operatorname{tg} v = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{v} + \frac{1}{3v^3} - \frac{1}{5v^5} + \frac{1}{7v^7} - \cdots$

für $v > 1$ und $v < -1$. Seite 351.

Formel 110. $\operatorname{arc}\operatorname{cotg} w = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\operatorname{tg} w.$ Seite 352.

Formel 111. $\operatorname{arc}\operatorname{cotg} w = \frac{\pi}{2} - w + \frac{1}{3}w^3 - \frac{1}{5}w^5 + \frac{1}{7}w^7 - \cdots$

für $-1 \leqq w \leqq +1$. Seite 352.

Formel 112. $\operatorname{arc}\operatorname{cotg} w = \frac{1}{w} - \frac{1}{3w^3} + \frac{1}{5w^5} - \frac{1}{7w^7} + \cdots$

für $w > 1$ und $w < -1$. Seite 352.

Formel 113. Leibniz'sche Reihe: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$ S. 352.

Formel 114. $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \cdots$ Seite 353.

Formel 115. Lagny'sche Reihe:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left\{1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \cdots\right\} \text{ S. 353.}$$

Formel 116. $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$. Seite 354.

Formel 117. Euler'sche Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right) - \cdots$$ Seite 354.

Formel 118. $4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$. Seite 355.

Formel 119. Machin'sche Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right)$$

Seite 355.

Formel 120. $\pi = 3{,}14159265$. Seite 356.

Verlag von L. v. Vangerow in Bremerhaven.

I. Mathematik.

(Grundrechnungsarten, Algebra, Geometrie, Stereometrie, Astronomie, Nautik).

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Erstes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen.** Mit 71 Erkl. und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **A. Frömter.** Preis: Mk. 3,—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Zweites Buch: **Das Rechnen mit benannten Zahlen.** Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Frömter** und **Neubüser.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Drittes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.)** Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. G. Maier.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen (Elemente der Buchstabenrechnung), **der Verhältnisse und Proportionen.** Erster Teil: Mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen. Zweiter Teil: **Elemente der Zahlenlehre. Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen.** Mit einer Sammlung von 277 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von Prof. **Hans Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Erster Teil: **Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen.** Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer **Münz-, Mass- und Gewichtstabelle.** Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Richard Olbricht.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Zweiter Teil: **Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente.** Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsenberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet von **Dr. R. Olbricht.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Adolf Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Verlag von L. v. Vangerow in Bremerhaven.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Zweiter Band: Zweite Hälfte: **Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger.** Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer von R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch der Reibungselektrizität (Friktions-Elektrizität, statischen oder ruhenden Elektrizität), erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der Kontaktelektrizität (Galvanismus) nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer von Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Induktionselektrizität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik). Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer von Dr. Ad. Krebs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Elektrodynamik. Erster Teil: Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer von Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch des Elektromagnetismus. Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer von Dr. O. May und Ad. Krebs.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Erster Band. **Die Metalloide.** Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer von Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Zweiter Band. **Die Metalle.** Mit 573 Erklärungen 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer von Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Erster Teil: **Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittelungen.** Mit 258 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Dipl. und staatlich geprüfter Ingenieur. Preis: Mk. 3.—. In Schuleinband Mk. 3.30.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Zweiter Teil: **Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmlings, Steinschnitt, Centralperspektive.** Anhang: **Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.** Mit 217 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Dipl. und staatlich geprüfter Ingenieur. Preis: Mk. 3.—. In Schuleinband Mk. 3.30.